

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté des sciences appliquées
Département de génie mécanique

**SIMULATION D'ÉCOULEMENTS INTERNES COMPRESSIBLES
LAMINAIRES ET TURBULENTS
PAR UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS**

Thèse de doctorat ès sciences appliquées
Spécialité : génie mécanique

Ali REBAINE

Sherbrooke (Québec), CANADA

Février 1997

À ma femme
Khadidja

À mes enfants

À mes parents, à mes frères et à ma soeur

RÉSUMÉ

Ce travail consiste en la simulation numérique des écoulements internes compressibles bidimensionnels laminaires et turbulents. On s'intéresse, particulièrement, aux écoulements dans les éjecteurs supersoniques. Les équations de Navier-Stokes sont formulées sous forme conservative et utilisent, comme variables indépendantes, les variables dites enthalpiques à savoir: la pression statique, la quantité de mouvement et l'enthalpie totale spécifique. Une formulation variationnelle stable des équations de Navier-Stokes est utilisée. Elle est basée sur la méthode *SUPG* (Streamline Upwinding Petrov Galerkin) et utilise un opérateur de capture des forts gradients. Un modèle de turbulence, pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs, est mis au point. Il consiste à séparer deux régions distinctes: une région proche de la paroi solide, où le modèle de Baldwin et Lomax est utilisé et l'autre, loin de la paroi, où une formulation nouvelle, basée sur le modèle de Schlichting pour les jets, est proposée. Une technique de calcul de la viscosité turbulente, sur un maillage non structuré, est implémentée. La discrétisation dans l'espace de la forme variationnelle est faite à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant une approximation mixte: quadratique pour les composantes de la quantité de mouvement et de la vitesse et linéaire pour le reste des variables. La discrétisation temporelle est effectuée par une méthode de différences finies en utilisant le schéma d'Euler implicite. Le système matriciel, résultant de la discrétisation spatio-temporelle, est résolu à l'aide de l'algorithme *GMRES* en utilisant un préconditionneur diagonal. Les validations numériques ont été menées sur plusieurs types de tuyères et éjecteurs. La principale validation consiste en la simulation de l'écoulement dans l'éjecteur testé au centre de recherche *NASA Lewis*. Les résultats obtenus sont très comparables avec ceux des travaux antérieurs et sont nettement supérieurs concernant les écoulements turbulents dans les éjecteurs.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la supervision de M. Azzeddine Soulaïmani, professeur au département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure, et de M. Yves Mercadier, professeur au département de génie mécanique à l'Université de Sherbrooke.

Mes vifs remerciements et ma reconnaissance au professeur Azzeddine Soulaïmani qui a dirigé de près cette recherche. Son souci qu'il porte à l'avancement de la science, sa patience, ses conseils et son soutien financier ont contribué énormément à la réalisation de ce travail.

J'exprime mes remerciements et ma reconnaissance au professeur Yves Mercadier qui a proposé ce sujet de recherche. Je le remercie pour son soutien financier sa patience et ses encouragements.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes collègues Nacer Eddine EL Kadri, pour les séances de travail et de discussion que nous avons eu et Nizar Bensalah et Mekki Idrissi pour leurs encouragements continus.

J'exprime mes remerciements à M. Wahid Ghaly, professeur au département de génie mécanique à l'Université Concordia, à M. Pierre Proulx, professeur au département de génie chimique à l'Université de Sherbrooke, et à M. Nicolas Galanis professeur au département de génie mécanique à l'Université de Sherbrooke, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à exprimer mes remerciements au personnel du département de génie mécanique de l'École de technologie supérieure de m'avoir accueilli au laboratoire *GRANIT* et mis à ma disposition tout l'équipement nécessaire à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
RÉSUMÉ	<i>i</i>
REMERCIEMENTS	<i>ii</i>
TABLE DES MATIÈRES	<i>iii</i>
LISTE DES FIGURES	<i>vii</i>
LISTE DES SYMBOLES	<i>xii</i>
 CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	 1
1.1. La méthode des éléments finis	2
1.2. Les éjecteurs	3
1.3. Objectifs	6
1.4. Plan de la thèse	6
 CHAPITRE 2 : FORMULATION DU MODÈLE MATHÉMATIQUE ..	 8
2.1. Introduction	8
2.2. Équations de conservation en variables conservatives	8
2.3. Équations de conservation en variables enthalpiques	12
Sommaire	16
 CHAPITRE 3 : MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS	
TURBULENTS	17

3.1. Introduction	17
3.2. Moyennes pondérées par la masse	18
3.3. Équations moyennes de conservation	19
3.4. Modèles de turbulence	21
3.4.1. Modèle de Boussinesq - viscosité turbulente	21
3.4.2. Modèles algébriques - longueur de mélange	22
3.4.3. Modèles à une équation de transport	24
3.4.4. Modèles à deux équations de transport	25
3.4.5. Modèle de fermeture du second ordre	27
3.4.6. Modèle RNG	27
3.4.7. Choix du modèle de turbulence	29
3.5. Modélisation de l'écoulement turbulent	30
3.5.1. Modélisation des tensions et des flux de chaleur	30
3.5.2. Modèle de Baldwin et Lomax	32
3.5.3. Modélisation des jets libres turbulents	35
3.5.4. Modèle proposé pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs	37
Sommaire	40

CHAPITRE 4 : FORMULATION DU MODÈLE NUMÉRIQUE

4.1. Introduction	41
4.2. Formulation variationnelle	42
4.3. Conditions aux limites	43
4.3.1. Conditions d'entrée d'écoulement	43
4.3.2. Conditions de sortie d'écoulement	44
4.3.3. Condition de symétrie	45

4.3.4. Conditions aux parois solides	45
4.4. Discrétisation des équations intégrales	46
4.4.1. Discrétisation spatiale	46
4.4.2. Discrétisation temporelle	49
4.4.3. Choix de l'élément	49
4.5. Calcul numérique de la viscosité turbulente	51
4.6. Forme matricielle	54
4.7. Méthode de résolution	54
4.7.1. Méthode de Newton-Raphson	54
4.7.2. Méthode <i>GMRES</i>	56
4.7.3. Préconditionnement	59
Sommaire	59
CHAPITRE 5 : MÉTHODES DE STABILISATION	60
5.1. Introduction	60
5.2. Équation de convection-diffusion	60
5.2.1. Instabilité des schémas centrés	61
5.2.2. Schéma décentré - diffusion artificielle	63
5.2.3. Méthodes de Galerkin et Petrov-Galerkin	65
5.2.4. Méthode <i>SUPG</i>	66
5.3. Équations de Navier-Stokes et d'Euler	69
5.4. Opérateur de capture de chocs	72
Sommaire	73
CHAPITRE 6 : VALIDATIONS ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES ...	74
6.1. Introduction	74
6.2. Écoulements dans les tuyères	74

6.2.1. Écoulement non visqueux	74
6.2.1.1. Écoulement subsonique-supersonique	75
6.2.1.2. Écoulement supersonique avec choc	75
6.2.2. Écoulement visqueux	76
6.3. Écoulement turbulent sur une plaque plane	78
6.4. Application aux éjecteurs	78
6.4.1. Éjecteur "EJECT1"	79
6.4.1.1. Écoulement laminaire	79
6.4.1.2. Écoulement turbulent	80
6.4.2. Éjecteur "EJECT2"	81
Résultats	84
Sommaire	132
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS	133
ANNEXE A	136
ANNEXE B	143
ANNEXE C	149
BIBLIOGRAPHIE	154

LISTE DES FIGURES

No.	Pages
Figure 3.1 : Distribution de la viscosité turbulente.	33
Figure 3.2 : a) jet libre, b) jet confiné à l'intérieur d'un éjecteur.	36
Figure 3.3 : Définition du modèle proposé.	39
Figure 4.1 : Élément de discrétisation spatiale.	50
Figure 4.2 : Technique de calcul de la viscosité turbulente.	53
Figure 6.1: Tuyère de type GPL, maillage.	86
Figure 6.2: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.	86
Figure 6.3: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.04$), écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.	87
Figure 6.4: Lignes iso-densité ($\Delta \rho = 0.04$), écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.	87
Figure 6.5: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.	88
Figure 6.6: Nombre de Mach sur la paroi, écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.	88
Figure 6.7: Tuyère traitée par van Leer, maillage initial.	90
Figure 6.8: Tuyère traitée par van Leer, maillage adapté.	90
Figure 6.9.1: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$) sur maillage initial, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.	91
Figure 6.9.2: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$) sur maillage adapté, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.	91

Figure 6.10.1: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.04$) sur maillage initial, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.	92
Figure 6.10.2: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.04$) sur maillage adapté, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.	92
Figure 6.11.1: Lignes iso-densité ($\Delta \rho = 0.04$) sur maillage initial, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.	93
Figure 6.11.2: Lignes iso-densité ($\Delta \rho = 0.04$) sur maillage adapté, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.	93
Figure 6.12: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.	94
Figure 6.13: Tuyère à deux cols, maillage.	96
Figure 6.14.1: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$	96
Figure 6.14.2: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$	97
Figure 6.14.3: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$	97
Figure 6.15.1: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$	98
Figure 6.15.2: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$	98
Figure 6.15.3: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$	99
Figure 6.16.1: Lignes iso-densité ($\Delta \rho = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$	99
Figure 6.16.2: Lignes iso-densité ($\Delta \rho = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$	100
Figure 6.16.3: Lignes iso-densité ($\Delta \rho = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$	100
Figure 6.17: Distribution de la viscosité de capture de chocs ($\Delta \mu_{cc} = 10^{-3}$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$	101
Figure 6.18: Distribution de la viscosité de capture de chocs ($\Delta \mu_{cc} = 10^{-3}$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$	101

Figure 6.19.1: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$	102
Figure 6.19.2: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$	102
Figure 6.19.3: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$	103
Figure 6.20.1: Pression sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$	103
Figure 6.20.2: Pression sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$	104
Figure 6.20.3: Pression sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$	104
Figure 6.21.1: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$	105
Figure 6.21.2: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$	105
Figure 6.21.3: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$	106
Figure 6.22.1: Coefficient de frottement sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$	106
Figure 6.22.2: Coefficient de frottement sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$	107
Figure 6.22.3: Coefficient de frottement sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$	107
Figure 6.23: Plaque plane, maillage.	109
Figure 6.24: Profil de vitesse longitudinale à la position $x/L = 0.6$, écoulement compressible turbulent sur une plaque plane.	109
Figure 6.25: Profil de viscosité turbulente à la position $x/L = 0.6$, écoulement compressible turbulent sur une plaque plane.	110
Figure 6.26: Éjecteur "EJECT1", géométrie.	112
Figure 6.27: Maillage, écoulement compressible laminaire dans l'éjecteur "EJECT1".	112
Figure 6.28: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.15$), écoulement compressible laminaire dans l'éjecteur "EJECT1".	113
Figure 6.29: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible laminaire dans l'éjecteur "EJECT1".	113

Figure 6.30: Distribution de la viscosité de capture de chocs ($\Delta\mu_{cc} = 5 \cdot 10^{-4}$), écoulement compressible, laminaire dans l'éjecteur "EJECT1".	114
Figure 6.31: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	114
Figure 6.32: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible, laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	115
Figure 6.33.1: Profils de vitesse longitudinale à l'entrée de la zone de mélange écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	115
Figure 6.33.2: Profils de vitesse longitudinale au milieu de la zone de mélange écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	116
Figure 6.33.3: Profils de vitesse longitudinale à la sortie de la zone de mélange écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	116
Figure 6.34: Maillage, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	118
Figure 6.35: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.1$), écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	118
Figure 6.36: Lignes isobares ($\Delta P = 0.005$), écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	119
Figure 6.37: Visualisation expérimentale donnée par Fabri et Siestrunck [29].	119
Figure 6.38: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	120
Figure 6.39: Pression sur la paroi de la zone de mélange, écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	120
Figure 6.40: Coefficient de frottement sur la paroi de la zone de mélange écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	121
Figure 6.41: Profils de vitesse longitudinale le long de la zone de mélange écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	121
Figure 6.42: Lignes iso-viscosité turbulente ($\Delta\mu_t = 10.$), écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	122
Figure 6.43: Profils de viscosité turbulente le long de la zone de mélange écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	122
Figure 6.44: Éjecteur "EJECT2", géométrie.	124
Figure 6.45: Éjecteur "EJECT2", maillage.	124
Figure 6.46: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.05$), écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	125

Figure 6.47: Lignes iso-Mach [52], écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	125
Figure 6.48: Lignes isobares ($\Delta P = 0.01$), écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	126
Figure 6.49: Lignes isobares [52], écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	126
Figure 6.50: Lignes iso-viscosité turbulente ($\Delta \mu_t = 2 \cdot 10^4$), écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	127
Figure 6.51: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	127
Figure 6.52: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	128
Figure 6.53: Pression sur la paroi de la zone de mélange, écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	128
Figure 6.54: Profils de vitesse longitudinale le long de la zone de mélange écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	129
Figure 6.55.1: Profils de vitesse longitudinale à l'entrée de la zone de mélange écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	129
Figure 6.55.2: Profils de vitesse longitudinale au milieu de la zone de mélange écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	130
Figure 6.55.3: Profils de vitesse longitudinale à la sortie de la zone de mélange écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	130
Figure 6.56: Profils de viscosité turbulente le long de la zone de mélange écoulement compressible, turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	131
Figure B1: Champ de vitesse, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$.	144
Figure B2: Champ de vitesse, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.	145
Figure B3: Champ de vitesse, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.	146
Figure B4: Champ de vitesse, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".	147
Figure B5: Champ de vitesse, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".	148
Figure C1: Géométrie de la tuyère bidimensionnelle de type GPL.	150
Figure C2: Géométrie de la tuyère à deux cols.	150

Figure C3: Visualisations optiques d'un écoulement dans un éjecteur données par la référence [125].	152
Figure C4: Lignes iso-Mach et isobares d'un écoulement dans un éjecteur données par la référence [52].	153

LISTE DES SYMBOLES

A^+	constante de van Driest
C_f	coefficient de pression
c_p	chaleur spécifique à pression constante
c_v	chaleur spécifique à volume constant
C_k	coefficient de capture de chocs
D	facteur d'amortissement de van Driest
$d\Omega$	élément de volume
$d\Gamma$	élément de surface
e	énergie totale spécifique
E	énergie totale par unité de volume
F	fonction vortacité
F_{kleb}	facteur d'intermittence de Klebanoff
F_{sill}	fonction sillage
\mathbf{f}	vecteur forces de volume de composantes f_i
h	enthalpie totale spécifique
H	fonction poids
i	énergie interne spécifique
\underline{I}	tenseur unité
J	jacobien de la transformation sur l'élément réel
j	jacobien de la transformation sur l'élément de référence; inverse de J
k	énergie cinétique de turbulence
L	longueur caractéristique
l	longueur de mélange
M	nombre de Mach
n	dimension du problème $n = 1, 2, 3$

- \mathbf{n} vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur
 N fonctions d'interpolation
 p pression
 Pe nombre de Peclet
 Pr nombre de Prandlt
 Pr_t nombre de Prandlt turbulent
 \mathbf{q} flux de chaleur
 \mathbf{q}_t flux de chaleur turbulent
 R constante des gaz parfaits
 \mathbf{R} résidu
 \mathcal{R} ensemble des nombres réels
 Re nombre de Reynolds
 t temps
 \mathbf{t} vecteur tangentiel unitaire orienté dans le sens horaire
 T température
 \mathbf{u} vecteur vitesse de composantes u_i ou (u, v, w)
 \mathbf{U} vecteur quantité de mouvement par unité de volume
 de composantes U_i
 u_τ vitesse de frottement
 \mathbf{V} vecteur des variables conservatives
 \mathbf{W} vecteur des fonctions de pondération
 \mathbf{x} vecteur coordonnées de composantes x_i ou (x, y, z)
 \mathbf{Y} vecteur des variables indépendantes
- γ rapport des chaleurs spécifiques
 δ épaisseur de la couche de cisaillement
 δ_{ij} symbole de Kronecker
 ε taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente
 ϵ tolérance
 λ coefficient de conductivité thermique
 λ_t coefficient de conductivité thermique turbulent
 μ viscosité dynamique
 μ_t viscosité dynamique turbulente
 ν viscosité cinétique
 ν_t viscosité cinétique turbulente

ξ	vecteur des coordonnées intrinsèques	$\xi = (\xi, \eta)$
ρ	densité	
σ	tenseur des contraintes visqueuses de composantes	σ_{ij}
τ	matrice de stabilisation de composantes	τ_{ij}
θ	épaisseur de quantité mouvement	
Γ	frontière de	Ω
Ω	domaine de	\mathbb{R}^2

Indices

0	totale ou de stagnation
i	selon la direction x
j	selon la direction y
e	sur l'élément
p	primaire
s	secondaire
m	mélange
t	turbulent
,	dérivée par rapport à
∞	à l'infini

Notations

$\{.\}$	vecteur colonne
$\langle . \rangle$	vecteur ligne
$[.]$	matrice
\otimes	produit tensoriel
—	moyenne d'ensemble ou de Reynolds.
\sim	moyenne pondérée par la masse.
'	de fluctuation.

Note : cette liste ne doit pas être considérée exhaustive. Certains symboles sont utilisés de façon particulière dans un contexte précis; les définitions explicites sont alors clairement énoncées dans le texte.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les développements théoriques de la dynamique des fluides visent à établir et à résoudre les équations gouvernant les différentes catégories d'écoulements. Les équations de dynamique des fluides Newtoniens stationnaires et instationnaires sont connues depuis plus de 150 années. Cependant, la résolution de ces équations à des échelles très réduites telles que la turbulence reste encore un champ de recherche très actif. La dynamique des fluides expérimentale a joué un rôle très important dans la validation et la mise en évidence des limites des différentes approximations des équations gouvernantes. Le développement de la vitesse d'exécution et de l'espace mémoire des ordinateurs depuis les années 1950 a conduit à l'émergence de la dynamique des fluides numérique (Computational Fluid Dynamics : CFD). Cette branche de dynamique des fluides vient compléter la théorie et l'expérience en fournissant un outil efficace et relativement peu coûteux de simulations des écoulements réels. La branche CFD présente cinq avantages par rapport à l'expérimental:

- Le temps nécessaire de conception et de développement des modèles numériques très avancés est réduit de manière significative.
- Elle peut simuler des conditions non reproductibles par les modèles expérimentaux (nombres de Mach et de Reynolds très élevés).
- Elle prévoit la compréhension de plusieurs détails et informations.
- Elle est très peu coûteuse que la soufflerie.
- Elle consomme très peu d'énergie.

1.1. La méthode des éléments finis

Les équations gouvernant les écoulements pratiques internes ou externes sont, généralement, compliquées à résoudre analytiquement. De plus, la géométrie de la frontière des domaines d'intérêt est, en général, tellement complexe qu'une solution analytique d'une équation ou d'un système d'équations, décrivant un problème physique donné, devienne inaccessible. Ainsi, l'utilisation de techniques numériques est devenue indispensable pour trouver des solutions approchées, de plus en plus précises, à des problèmes posés. Les méthodes numériques permettent donc de transformer l'équation ou le système d'équations aux dérivées partielles en une équation ou un système d'équations algébriques pour la résolution par ordinateurs. Parmi ces méthodes on cite: la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis. A cause de sa puissance et de sa flexibilité, la méthode des éléments finis est maintenant très largement utilisée en ingénierie et dans l'industrie. Cette méthode se caractérise par un ensemble de facteurs qui ont conduit à son succès à savoir:

- C'est une méthode de résidus pondérés d'où sa flexibilité d'associer une variété de formulations variationnelles à un modèle différentiel donné.
- Elle peut s'adapter facilement à des maillages non structurés d'où sa puissance pour modéliser des géométries très complexes.
- Elle permet une bonne précision à un coût raisonnable grâce à l'espace d'approximation très riche qu'elle peut utiliser.
- Elle permet un traitement naturel des conditions aux limites de type différentiel.

L'approximation par la méthode des éléments finis classique de type Galerkin [1], des problèmes de convection dominante ou de convection pure, est équivalente à une approximation de type différences finies centrées pouvant conduire à des solutions instables. De la diffusion supplémentaire est alors nécessaire pour stabiliser la solution. Cette diffusion peut être engendrée soit en ajoutant, tout simplement, une viscosité artificielle à la viscosité réelle du fluide sans pour autant changer de schéma ou de méthode de résolution, soit en adoptant un autre schéma ou méthode de résolution. Ainsi, plusieurs méthodes d'éléments finis sont apparues:

- Les méthodes utilisant les notions de caractéristiques [2, 3].
- La méthode de Petrov-Galerkin [4]. Cette méthode consiste à ajouter à la formulation de Galerkin un terme de perturbation en remplaçant la fonction de pondération continue de Galerkin par la somme de cette fonction continue et une fonction de perturbation discontinue (voir Chap. 5).
- La méthode de Taylor-Galerkin [5] équivalente à la méthode de Lax-wendroff en différences finies. Cette méthode consiste à introduire de la dissipation à travers une discrétisation temporelle.
- La méthode *SUPG* (Streamline Upwinding Petrov Galerkin) [6, 7, 8]. C'est une variante de la méthode de Petrov-Galerkin basée sur le concept de la diffusion artificielle optimale (voir Chap. 5). C'est une méthode de résidus pondérés au sens qu'une solution exacte régulière du problème physique original reste encore

une solution du problème variationnel. Ceci assure non seulement une précision de l'approximation mais, aussi une stabilité spatio-temporelle. De plus, la robustesse de cette méthode repose essentiellement sur le bon choix de la matrice $\underline{\tau}$ dite de stabilisation [9, 10]. Telle que conçue, cette méthode engendre de la dissipation supplémentaire selon la direction des lignes de courant. Elle se trouve donc très efficace quand la solution est régulière. Cependant, en présence de discontinuités (chocs, etc ...), la direction des lignes de courant peut ne pas être la direction optimale et par conséquent, certaines oscillations peuvent persister au voisinage des discontinuités. Ainsi, un terme supplémentaire, appelé capteur de chocs, est ajouté à la méthode permettant de favoriser davantage la dissipation selon des directions autres que les lignes de courant [9, 10, 11, 12, 13]. Une autre méthode permettant de renforcer la méthode *SUPG* est la méthode *SUFL* (Streamline Upwinding Flux Limiter) [14, 15]. Cette méthode consiste d'abord à détecter les zones de variations importantes de flux où de la diffusion sera par la suite introduite pour lisser la solution. Elle agit donc comme une méthode de capture de chocs qui n'introduit de la diffusion que s'il est nécessaire.

- L'extension de la méthode *SUPG* aux problèmes multidimensionnels linéaires symétriques, de type transport par convection-diffusion et par convection pure, a conduit au développement de la méthode *GLS* (Galerkin Least-Squares) [16].

La méthode *SUPG* a été utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes et d'Euler compressibles en variables dites entropiques [9, 17, 18, etc ...]. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à exploiter la méthode *SUPG* en utilisant directement les variables dites conservatives [10, 19, 20, 21, 22, 23, 24, etc ...]. Cette dernière approche a pour avantage d'être plus simple à mettre en oeuvre numérique que celle utilisant les variables entropiques de plus, elle donne la possibilité d'appliquer facilement les conditions aux limites physiques.

1.2. Les éjecteurs

Les équipements nécessaires pour le conditionnement d'air, la réfrigération, le séchage (bois, pâte à papier, etc ...) et le transport (aérien, terrestre ou naval) jouent un rôle très important dans la vie moderne de nos jours. Cependant, l'énergie qu'il faut dépenser, dans la réalisation de ces équipements et aussi, l'énergie importante que peuvent consommer ces derniers dans les différents types d'applications domestiques ou industrielles, devient de plus en plus un problème très sérieux à surmonter. Ainsi, il est désirable de penser à de nouvelles techniques pouvant utiliser de l'énergie, de manière efficace et économique, telle que l'énergie solaire, géothermique et les pertes de chaleurs comme sources directes pour alimenter les différents équipements. Dans cet esprit, on peut, par exemple, remplacer un compresseur mécanique par un compresseur thermique appelé aussi thermocompresseur ou éjecteur.

Les éjecteurs sont utilisés dans diverses applications industrielles telles que

le pompage, le brassage, l'entraînement de fluides, l'augmentation de poussée et la recompression de vapeurs. Comme il s'agit d'appareils sans pièces mobiles, ils présentent de nombreux avantages tels que: fabrication simple, flexibilité d'emploi, faible poids, grande sécurité et possibilité d'absorber n'importe quel fluide dans n'importe quelle condition. Le principe de fonctionnement des éjecteurs consiste en deux écoulements: un dit primaire de niveau énergétique très élevé qui entraîne un autre écoulement dit secondaire de niveau énergétique très faible. Les deux écoulements entrent en contact et interagissent dans une conduite constituant la zone de mélange où l'écoulement secondaire est ré-énergisé pour une utilisation ultérieure. Dans les applications modernes reliées à l'énergie, qui commandent des efficacités supérieures, les éjecteurs doivent fonctionner en régime supersonique ce qui complique leur conception et leur mode de fonctionnement. De nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été menés sur les éjecteurs. En effet, Porter et Squyers [25] ont recensé plus de 1600 références portant sur la théorie et les performances des éjecteurs. Les premières recherches sur les éjecteurs "supersoniques" reviennent à Mellanby [26], Keenan et Neumann [27] et Johannsen [28]. Vient ensuite Fabri et Siestrunk [29] qui, en se basant sur le modèle d'écoulement monodimensionnel isentropique de gaz parfaits, ont développé une théorie de calcul des performances des éjecteurs. Cette étude théorique était accompagnée d'une étude expérimentale. Les travaux de Fabri et Siestrunk constituent une base fondamentale de tout les travaux théoriques sur les performances et les caractéristiques des éjecteurs menés depuis [30 à 41, etc,...]. Cependant, les effets induits par l'interaction des deux écoulements primaire et secondaire tels que les effets visqueux, la turbulence, la formation d'ondes de chocs et leur interactions avec les frontières ou les zones de cisaillement, font que de telles études, basées sur la théorie des écoulements unidimensionnels, restent limitées surtout quand on veut les utiliser pour la conception. Ainsi, il devient nécessaire d'utiliser le système complet d'équations de Navier-Stokes afin de pouvoir capter proprement les phénomènes complexes mentionnés précédemment. En effet récemment, certains chercheurs ont considéré les équations de Navier-Stokes avec modélisation de la turbulence pour simuler les écoulements dans les éjecteurs. Leurs travaux se résument comme suit:

Lund et al [42] supposent, qu'à partir d'une certaine distance de la sortie de la tuyère, le jet primaire se détend complètement jusqu'à la paroi de la zone de mélange et reste colé à cette paroi jusqu'à la sortie de l'éjecteur. Ils distinguent alors deux régions: une région visqueuse constituée par le jet complètement détendu et une région non visqueuse à l'extérieur du jet. Ils modélisent la turbulence, dans la zone visqueuse, à l'aide d'un modèle pour le jet basé sur le modèle de Schlichting [43]. Ce modèle est sans doute incomplet car, il ignore complètement la couche limite turbulente formée sur la paroi de la zone de mélange et par conséquent ne peut pas modéliser proprement l'écoulement dans l'éjecteur.

En s'inspirant des travaux de Lund et al [42], Deese et Agarwal [44] utilisent le même modèle pour le jet combiné avec la partie interne du modèle de Baldwin et Lomax [45] pour modéliser la couche limite turbulente sur la paroi de l'éjecteur. Ils définissent alors la viscosité turbulente à injecter dans l'écoulement comme étant

le minimum des viscosités données par le modèle du jet et la partie interne du modèle de Baldwin et Lomax. Cette procédure est intéressante car elle met en évidence l'effet de la paroi sur l'écoulement. Cependant, utiliser seulement la partie interne du modèle de Baldwin et Lomax peut engendrer une viscosité énorme qui peut faire diffuser complètement l'écoulement et par conséquent faire disparaître les caractéristiques de l'écoulement dans l'éjecteur telles que les structures de chocs. De plus, numériquement rien ne peut garantir que ce modèle vire, à chaque fois, vers le modèle interne de Baldwin et Lomax proche de la paroi et vers le modèle du jet loin de cette paroi.

Malecki et al [46] ont comparé le modèle de Baldwin et Lomax [45] et le modèle $k-\varepsilon$, [47]. Ils montrent alors que la dimension transversale de la couche de cisaillement, à la sortie de l'éjecteur, est beaucoup plus grande dans le cas du modèle $k-\varepsilon$ que dans le cas du modèle de Baldwin et Lomax. D'où un mélange plus important qui est, bien sûr, une caractéristique du modèle $k-\varepsilon$ [48]. De plus, les auteurs montrent les structures de chocs à partir des lignes de nombre Mach, pour des rapports de pressions totales (primaire/secondaire) différents, obtenues par le modèle $k-\varepsilon$ seulement et ceci sans aucun détail ni aucune information quant à la structure de l'écoulement sur la paroi de l'éjecteur. Il est sûr que le modèle $k-\varepsilon$ favorise le mélange des écoulements primaire et secondaire cependant, son intégration proche de la paroi reste toujours un problème à résoudre. En effet, utiliser la loi de paroi logarithmique pour compléter le modèle $k-\varepsilon$ [49, 50] peut ne pas garantir une modélisation correcte de l'écoulement particulièrement dans les éjecteurs où, sur la paroi, on assiste à des problèmes de recirculations [51, 52].

Choi et Soh [52] ont utilisé le modèle de Baldwin et Lomax basé sur la formulation de Thomas [53]. Les résultats obtenus par les auteurs, pour différents rapports de sections, pour un rapport de pressions totales (primaire/secomdaire) fixé, et vis versa, sont intéressant et constituent une référence de comparaison pour les travaux sur les éjecteurs.

Finalement, EL Omari [54], a utilisé seulement le modèle de Baldwin et Lomax. Les résultats obtenus par cet auteur ne présentent pas de structures de chocs. Ceci est du, ou bien parce que le modèle n'est pas adéquat dans la zone centrale du jet et par conséquent se trouve incapable de capter ces structures, ou bien parce que la viscosité artificielle introduite est probablement très élevée.

Excepté Lund et al [42] qui ont utilisé la méthode des panneaux dans la zone non visqueuse (à l'extérieur du jet) et une méthode intégrale dans la zone visqueuse (dans le jet), le reste des auteurs ci-haut ont résolu les équations de Navier-Stokes en variables conservatives: la densité, la quantité de mouvement et l'énergie totale, à l'aide d'une méthode de volumes finis sur un maillage structuré [44, 46, 52, 54]. Ainsi, on peut dire que la modélisation numérique des écoulements dans les éjecteurs est belle et bien amorcée et que la porte reste grande ouverte à d'autres méthodes numériques et modèles de turbulence pour faire leurs preuves.

Dans ce travail on se propose de modéliser les écoulements dans les éjecteurs en résolvant les équations de Navier-Stokes, sous la forme conservative, en utilisant

d'autres variables indépendantes modernes dites variables enthalpiques: la pression statique, la quantité de mouvement et l'enthalpie totale spécifique, à l'aide d'une méthode d'éléments finis moderne et très robuste et d'une formulation nouvelle pour la modélisation de la turbulence dans ces écoulements.

1.3. Objectifs

Le but de cette recherche consiste en la modélisation, par la méthode des éléments finis, des écoulements internes bidimensionnels en général et des écoulements dans les éjecteurs en particulier. Les objectifs principaux de cette recherche sont:

- La mise au point d'une méthode d'éléments finis pour la simulation des écoulements internes bidimensionnels.
- La mise au point d'un modèle de turbulence pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs.
- La mise en oeuvre d'une technique de calcul numérique de la viscosité turbulente sur un maillage non structuré.

1.4. Plan de la thèse

La présentation de cette thèse est structurée comme suit:

Après ce chapitre d'introduction, la formulation du modèle mathématique est présentée au chapitre 2 où les équations de Navier-Stokes et d'Euler sont formulées sous forme conservative en variables conservatives: la densité, la quantité de mouvement et l'énergie totale et, en variables enthalpiques: la pression statique, la quantité de mouvement et l'enthalpie totale spécifique.

Les équations moyennes de conservation, une revue des modèles de turbulence et leurs avantages et inconvénients font l'objet du chapitre 3. Aussi, un modèle de turbulence proposé, pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs, est présenté dans ce chapitre.

Dans le chapitre 4, nous présentons la formulation variationnelle des équations de conservation, nous discutons des conditions aux limites et nous exposons la discrétisation spatio-temporelle de la formulation variationnelle. La technique de calcul numérique de la viscosité turbulente, la méthode de résolution du système matriciel et le préconditionnement utilisé font aussi l'objet de ce chapitre.

Le chapitre 5 est consacré aux méthodes de stabilisation des problèmes de convection-diffusion. Les schémas décentrés, la diffusion artificielle, la méthode de Petrov-Galerkin et la méthode *SUPG* ainsi que les méthodes de capture de chocs sont alors présentées dans ce chapitre.

La validation numérique de la formulation par éléments finis et du modèle de turbulence proposé font l'objet du chapitre 6. Plusieurs types d'écoulements internes compressibles bidimensionnels, visqueux et non visqueux, ont été étudiés et les résultats obtenus sont comparés aux résultats des travaux antérieurs.

Enfin, nous clôturons cette thèse par une conclusion générale en formulant quelques recommandations importantes pour les travaux futurs à très court et moyen termes.

CHAPITRE 2

FORMULATION DU MODÈLE MATHÉMATIQUE

2.1. Introduction

L'état d'écoulement d'un fluide est décrit par le champ de vitesse \mathbf{u} , la densité ρ , la pression p et la température T . Ces variables sont déterminées en chaque point de l'espace et à chaque instant à l'aide des équations de base suivantes :

- l'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse de la particule fluide.
- l'équation de la quantité de mouvement donnée par la seconde loi de Newton appliquée aux particules fluides.
- l'équation d'énergie qui exprime la conservation d'énergie de la particule fluide.
- l'équation d'état thermodynamique (ou équation constitutive) du fluide reliant les variables d'état p , ρ et T .

Les équations de conservation ci-dessus, appelées aussi équations de Navier-Stokes, seront formulées ici en variables conservatives: la densité ρ , la quantité de mouvement \mathbf{U} et l'énergie totale E et, en variables enthalpiques: la pression statique p , la quantité de mouvement \mathbf{U} et l'enthalpie totale par unité de masse h .

2.2. Équations de conservation en variables conservatives

Les équations de conservation de la masse (ou équation de continuité), de la quantité de mouvement et de l'énergie gouvernant les écoulements de fluides compressibles newtoniens s'écrivent, en terme de variables conservatives, comme suit:

- Équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.1)$$

- Équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{f} \quad (2.2)$$

- Équation d'énergie :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{u}] = \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} + r \quad (2.3)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= \rho \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ E &= \rho \left(i + \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \right) \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}} \right] \\ \mathbf{q} &= -\lambda \nabla T \\ i &= c_v T \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

où \mathbf{u} , ρ , p , T , E , $\underline{\underline{\sigma}}$, \mathbf{q} , $\rho \mathbf{f}$ et r sont respectivement le vecteur vitesse, la densité, la pression, la température, l'énergie totale, le tenseur des contraintes visqueuses, le flux de chaleur, les forces volumiques et la source de chaleur. t étant le temps. i est l'énergie interne, λ est la conductivité thermique et c_v est la chaleur spécifique à volume constant. μ est la viscosité dynamique.

A ces équations, on associe l'équation d'état du fluide qui, pour un gaz parfait s'écrit:

$$p = \rho RT \quad (2.5)$$

où R est la constante du gaz ($R = 0.287 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ pour l'air).

Les équations ci-dessus seront adimensionnalisées à l'aide des grandeurs de référence (d'indice r) telles que:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}_r} & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_r} & p^* &= \frac{p}{\rho_r |\mathbf{u}_r|^2} \\ i^* &= \frac{i}{|\mathbf{u}_r|^2} & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_r} & \lambda^* &= \frac{\lambda}{\lambda_r} \\ x^* &= \frac{x}{L_r} & t^* &= \frac{t}{L_r/|\mathbf{u}_r|} & T^* &= \frac{T}{|\mathbf{u}_r|^2/c_v} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

L_r est une longueur de référence.

La forme adimensionnelle des équations de conservation (2.1 à 2.3) sera:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{f} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{u}] &= \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{U}}{\rho} \\ T &= \frac{E}{\rho} - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} \\ p &= (\gamma - 1) \left[E - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho} \right] \\ \mathbf{q} &= -\frac{\gamma\mu}{RePr} \nabla \left[\frac{E}{\rho} - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} \right] \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\mu}{Re} \left[\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U}) \underline{\underline{I}} \right] - \\ &\quad \frac{\mu}{\rho^2 Re} \left[\mathbf{U} \cdot (\nabla \rho)^t + (\nabla \rho) \cdot \mathbf{U}^t - \frac{2}{3}(\mathbf{U}^t \cdot \nabla \rho) \underline{\underline{I}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Re et Pr sont respectivement les nombres de Reynolds et de Prandtl:

$$Re = \frac{\rho_r L_r \mathbf{u}_r}{\mu_r}$$

$$Pr = \frac{\mu_r c_p}{\lambda_r}$$

Les équations de conservation (2.7) peuvent se mettre sous la forme vectorielle suivante:

$$\boxed{\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{conv}(\mathbf{V}) = \mathbf{F}_{i,i}^{diff}(\mathbf{V}) + \mathcal{F}} \quad (2.9)$$

avec

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \rho \\ U_1 \\ U_2 \\ E \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_i^{conv} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_i u_1 + p \delta_{1i} \\ U_i u_2 + p \delta_{2i} \\ E u_i + p u_i \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_i^{diff} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{ij} u_j - q_i \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ f_i U_i \end{Bmatrix}$$

où \mathbf{V} est le vecteur des variables conservatives. \mathbf{F}_i^{conv} et \mathbf{F}_i^{diff} sont les vecteurs flux de convection et de diffusion respectivement. \mathcal{F} étant le vecteur source.

Une forme quasi-linéaire du système (2.9) serait:

$$\boxed{\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{V}_{,i} = (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i} + \mathcal{F}} \quad (2.10)$$

où \mathbf{A}_i sont les matrices jacobiniennes de transformation du vecteur flux de convection telles que:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{F}_{i,\mathbf{V}}^{conv} = \frac{\partial \mathbf{F}_i^{conv}}{\partial \mathbf{V}}$$

\mathbf{K}_{ij} sont les matrices de diffusion définies telles que :

$$\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j} = \mathbf{F}_i^{diff}$$

Les formes explicites des matrices \mathbf{A}_i et \mathbf{K}_{ij} sont données à l'annexe A.

Remarque 2.1 :

La modélisation des écoulements non visqueux se fait au moyen des équations d'Euler obtenues à partir des équations de Navier-Stokes (2.7) en annulant les termes visqueux. Dans ce cas, la forme vectorielle des équation d'Euler devient:

$$\boxed{\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{conv}(\mathbf{V}) = \mathcal{F}} \quad (2.11)$$

et la forme quasi-linéaire sera:

$$\boxed{V_{,t} + A_i V_{,i} = \mathcal{F}} \quad (2.12)$$

2.3. Équations de conservation en variables enthalpiques

Nous avons utilisé la formulation conservative en variables conservatives précédente pour simuler l'écoulement interne simple dans une tuyère convergente-divergente [11]. Cependant, nous nous sommes heurté au problème de la manière qu'il faut pour pouvoir appliquer des conditions aux limites de Dirichlet sur la pression statique p , la température totale T_0 et la pression totale P_0 . Toutefois, nous avons trouver une technique pour le faire. En effet, une manière d'imposer la pression statique à l'aide de la formulation en variables conservatives serait:

- ou bien d'imposer la pression de façon implicite sous forme d'une sollicitation (une force), à travers un terme d'intégrale de contour, agissant le long de la frontière, à l'entrée ou à la sortie de l'écoulement [11]. Dans ce cas, la pression sera imposée de manière non exacte et se trouve non uniforme sur la frontière en question. De plus le problème reste toujours posé concernant la pression et la température totales.
- ou bien de considérer la pression statique p comme variable indépendante au lieu de la densité. Dans ce cas, la densité sera évaluée en fonction des variables indépendantes (p, \mathbf{U}, E) par:

$$\rho = \frac{2 \left(E - \frac{p}{\gamma-1} \right)}{|\mathbf{u}|^2} \quad (2.13)$$

Cependant, pour un écoulement visqueux, où des conditions de non glissement, sur les parois solides, sont imposées, la densité, telle qu'exprimée par l'équation (2.13), devient indéfinie. Ainsi, si on veut maintenir la pression statique comme variable indépendante et aussi, satisfaire des conditions aux limites de Dirichlet sur la pression et la température totales, il devient nécessaire de considérer une autre variable indépendante autre que l'énergie totale E . Cette variable est l'enthalpie totale massique. D'où la formulation conservative en variables enthalpiques utilisant comme variables indépendantes la pression statique p , la quantité de mouvement \mathbf{U} et l'enthalpie massique h .

Remarque 2.2 :

Avec l'utilisation des variables enthalpiques, la pression statique devient une variable indépendante. Aussi, imposer la température totale revient tout simplement à imposer l'enthalpie totale correspondante. Finalement, la pression totale désirée est garantie en actualisant la pression statique correspondante (§ 4.3).

L'enthalpie totale spécifique (par unité de masse) h est définie par:

$$h = i + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} \quad (2.14)$$

En utilisant la définition de l'énergie totale E (Eq. 2.4), h peut s'écrire sous la forme:

$$h = \frac{E}{\rho} + \frac{p}{\rho} \quad (2.15)$$

Aussi, pour un gaz parfait, on sait que $di = c_v dT$ et par conséquent, si c_v est constante, il vient:

$$i = c_v T = \frac{p}{c_v(\gamma - 1)\rho} \quad (2.16)$$

D'où,

$$h = \frac{p}{c_v(\gamma - 1)\rho} + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} \quad (2.17)$$

La résolution de l'équation du second degré en ρ (2.17) donne:

$$\rho = \frac{[c_v(\gamma - 1) + 1]p}{2c_v(\gamma - 1)h} + \sqrt{\left[\frac{[c_v(\gamma - 1) + 1]p}{2c_v(\gamma - 1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h}} \quad (2.18)$$

En adoptant le changement de variables (2.15) et (2.18), les équations de conservation en variables conservatives (2.1 à 2.3) se transforment en des équations de conservation, en terme de variables enthalpiques, comme suit:

- Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.19)$$

- Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{f} \quad (2.20)$$

- Équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot [h\mathbf{U}] = \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} \quad (2.21)$$

avec ρ donnée par la relation (2.18).

En utilisant l'adimensionnalisation (2.6), mentionnée précédemment, la forme adimensionnelle des équations de conservation (2.19 à 2.21) s'écrit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{f} \\ \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{U}) &= \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{\gamma p}{2(\gamma - 1)h} + \sqrt{\left[\frac{\gamma p}{2(\gamma - 1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h}} \\ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{U}}{\rho} \\ T &= h - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} - \frac{p}{\rho} \\ \mathbf{q} &= -\frac{\gamma\mu}{RePr} \nabla \left[h - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho^2} - \frac{p}{\rho} \right] \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\mu}{Re} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Les formes vectorielle et quasi-linéaire du système (2.22) peuvent être obtenues respectivement à partir de la forme vectorielle et quasi-linéaire (2.9) ou (2.10), de la formulation en variables conservatives, en adoptant le changement de variables suivant:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}(\mathbf{Y}) \\ \mathbf{V}_{,t} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} \\ \mathbf{V}_{,i} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,i} \\ \mathbf{F}_i^{conv}(\mathbf{V}) &= \tilde{\mathbf{F}}_i^{conv}(\mathbf{Y}) \\ \mathbf{F}_i^{diff}(\mathbf{V}) &= \tilde{\mathbf{F}}_i^{diff}(\mathbf{Y}) \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

où $\mathbf{A}_0 = \mathbf{V}_{,\mathbf{Y}}$ est la matrice Jacobienne de transformation du vecteur des variables conservatives $\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{U}, E)^t$ en le vecteur des variables enthalpiques $\mathbf{Y} = (p, \mathbf{U}, h)^t$.

Les formes vectorielle et quasi-linéaire du système (2.22) seront respectivement:

$$\boxed{\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) = \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{diff}(\mathbf{Y}) + \tilde{\mathcal{F}}} \quad (2.25)$$

$$\boxed{\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} = (\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j})_{,i} + \tilde{\mathcal{F}}} \quad (2.26)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_i &= \tilde{\mathbf{F}}_{i,\mathbf{Y}}^{conv} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ij} &= \mathbf{K}_{ij} \mathbf{A}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Dans le cas des écoulements non visqueux, les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations d'Euler et les forme vectorielle (2.25) et quasi-linéaire (2.26) se réduisent respectivement à:

$$\boxed{\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) = \tilde{\mathcal{F}}} \quad (2.28)$$

$$\boxed{\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} = \tilde{\mathcal{F}}} \quad (2.29)$$

Remarque 2.3 :

Le vecteur \mathbf{Y} pourrait représenter n'importe quel autre type de variables conservatives [55].

Si $\mathbf{Y} = \mathbf{V}$ alors, la matrice de transformation \mathbf{A}_0 devient l'identité d'où, la formulation en variables conservatives.

Sommaire

Souvent, pour simuler un écoulement interne, on désire imposer des conditions aux limites de Dirichlet sur la pression statique p , la température totale T_0 et la pression totale P_0 . Cependant, dans la formulation conservative standard, les conditions aux limites concernent à priori les variables indépendantes: la densité ρ , la quantité de mouvement par unité de volume \mathbf{U} et l'énergie totale par unité de volume E . Par conséquent, les valeurs désirées de la pression ou de la température ne seront pas imposées de manière directe et se trouvent alors non exactes et non uniformes [11]. Ainsi, pour simuler les écoulements internes, nous proposons de résoudre les équations de conservation en terme de variables dites enthalpiques [55]: la pression statique p , la quantité de mouvement par unité de volume \mathbf{U} et l'enthalpie totale par unité de masse h . Avec l'utilisation des variables enthalpiques, la pression statique devient alors une variable indépendante, imposer la température totale T_0 revient à imposer l'enthalpie totale correspondante et enfin, la pression totale P_0 désirée est garantie en actualisant la pression statique correspondante (§ 4.3)

CHAPITRE 3

MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

3.1. Introduction

Le phénomène de turbulence a été analysé dès 1883 par O. Reynolds à partir d'observations réalisées à l'aide d'un procédé, devenu de nos jours très classique, de visualisation par filets colorés de l'écoulement dans des conduites rectilignes de section circulaire. L'expérience a été répétée depuis et elle montre que suffisamment loin de l'entrée de la conduite et à faible nombre de Reynolds, les lignes de courant sont parfaitement parallèles à l'axe de la conduite. Dans ce cas, l'écoulement est stationnaire et il est dit laminaire. A plus grand nombre de Reynolds, des instabilités apparaissent sous forme d'ondes, l'écoulement est devenu alors instationnaire tout en restant parfaitement organisé, il n'est pas encore turbulent. A très grand nombre de Reynolds, l'écoulement devient complètement irrégulier, il est dit turbulent. La turbulence n'est donc pas une propriété du fluide, mais un régime d'écoulement.

On ne peut pas dire que l'écoulement n'est plus laminaire dès qu'il est instationnaire, et on ne peut pas dire non plus qu'il est pleinement turbulent dès qu'il n'est plus laminaire. De ce fait, il n'existe pas de définition universelle de la turbulence [56].

En 1937, Taylor et vonKarman [57] proposent la définition suivante : *La turbulence est un mouvement irrégulier qui, en général, fait son apparition dans des fluides, liquides ou gazeux, quand ils s'écoulent sur une surface solide ou même quand des courants adjacents du même fluide s'écoulent l'un sur l'autre.*

Selon Hinze [58]: *Un écoulement turbulent est un écoulement irrégulier où la vitesse, la pression, la température, etc ... varient de façon aléatoire dans le temps*

et dans l'espace . C'est la définition la plus acceptée.

La turbulence se manifeste lorsque le nombre de Reynolds représentatif de l'écoulement devient grand. Elle est caractérisée par les propriétés suivantes:

- Les variations temporelle et spatiales de la vitesse sont aléatoires.
- Le champ de vitesse est tridimensionnel et rotationnel. On peut cependant, parler d'écoulement bidimensionnel, cela signifiera que statistiquement l'écoulement est bidimensionnel mais, il existera toujours des fluctuations des trois composantes de la vitesse dont l'une d'elle aura des variations autour d'une moyenne nulle.
- La turbulence est un phénomène non linéaire.
- Le fluide en écoulement turbulent peut toujours être considéré comme un milieu continu.
- La turbulence est un phénomène dissipatif.
- La capacité de mélange est accrue.
- Les écoulements turbulents ne sont pas prédictibles.

Le calcul des écoulements turbulents relève principalement de la résolution des équations de la mécanique des fluides, considérés comme milieux continus, qui permet de décrire l'évolution des champs de vitesse et température. Cependant, pour des problèmes complexes, un tel calcul sur ordinateur revient très cher. Ainsi, il devient nécessaire de recourir à des techniques permettant de simuler numériquement les écoulements turbulents. La technique la plus courante, dans les applications de type industriel, consiste en une description statistique de l'écoulement. La vitesse, la température, la pression, etc , sont alors décomposées en une composante moyenne et une fluctuation turbulente. Le nouveau système d'équations obtenu régit donc le comportement de l'écoulement moyen. Cependant, la non linéarité des équations de conservation, gouvernant l'écoulement du fluide, fait apparaître des inconnues supplémentaires sous forme de corrélations entre les composantes fluctuantes. La fermeture du système est alors réalisée au moyen d'hypothèses reposant principalement sur une représentation aussi correcte que possible des propriétés caractéristiques de la turbulence. Ces hypothèses forment un modèle de turbulence.

3.2. Moyennes pondérées par la masse

En écoulement turbulent de fluides compressibles, non seulement la vitesse et la pression fluctuent, mais aussi la densité ρ , la viscosité μ , la conductivité thermique λ et la température T . Les moyennes pondérées par la masse, couramment utilisées dans le cas de fluides compressibles, ont été développées par Favre et al [59]. Dans ce cas, les moyennes pondérées par la masse de la vitesse, de l'enthalpie totale et de la température sont définies respectivement par:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_i &= \frac{\overline{\rho \mathbf{u}_i}}{\bar{\rho}} \\ \tilde{h} &= \frac{\overline{\rho h}}{\bar{\rho}} \\ \tilde{T} &= \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Les fluctuations de la densité, de la vitesse et de la pression sont données respectivement par:.

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \rho - \bar{\rho} \\ \mathbf{u}'_i &= \mathbf{u}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i \\ p' &= p - \bar{p} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

On peut démontrer que :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\rho'} &= 0 \\ \overline{\rho \mathbf{u}'_i} &= 0 \\ \overline{\mathbf{u}'_i} &= \frac{\overline{\rho' \mathbf{u}'_i}}{\bar{\rho}} \\ \overline{\rho h'} &= 0 \\ \overline{h'} &= \frac{\overline{\rho' h'}}{\bar{\rho}} \\ \overline{\rho T'} &= 0 \\ \overline{T'} &= \frac{\overline{\rho' T'}}{\bar{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Note :

- désigne la moyenne d'ensemble ou de Reynolds.
- ~ désigne la moyenne pondérée par la masse.
- ' désigne la fluctuation.

3.3. Équations moyennes de conservation

En prenant la moyenne d'ensemble des équations de conservation, en terme de variables enthalpiques (2.19 à 2.21) et en utilisant les définitions et relations (3.1 à 3.3), les équations moyennes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent respectivement comme:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} = \nabla \cdot \underline{\underline{\bar{\sigma}}} + \nabla \cdot \underline{\underline{\bar{\tau}}} + \bar{\rho} \mathbf{f} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{h})}{\partial t} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{U}}) = \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\bar{\sigma}}}) + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\bar{\tau}}}) - \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} - \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_t + \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \quad (3.6)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \\ \underline{\underline{\bar{\sigma}}} &= \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}} \right] \\ \underline{\underline{\bar{\tau}}} &= -\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \\ \bar{\mathbf{q}} &= -\overline{\lambda \nabla T} \\ \bar{\mathbf{q}}_t &= \overline{\rho h' \mathbf{u}'} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

La pression, la température et la densité moyennes sont reliées par l'équation d'état moyenne:

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \tilde{T} \quad (3.8)$$

Remarque 3.1:

Avec l'utilisation des moyennes de Reynolds et de Favre, les équations moyennes obtenues ont une forme assez simple, en particulier, l'équation de conservation de la masse (3.4) qui garde sa forme habituelle. Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.5), il apparaît des tensions turbulentes $-\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ appelées aussi tensions de Reynolds. De même, l'équation de conservation de l'énergie (3.6) fait intervenir un terme de diffusion turbulente $\overline{\rho h' \mathbf{u}'}$. Ce dernier terme est interprété comme un flux de chaleur turbulent. L'équation d'état (3.8) garde la même forme connue.

3.4. Modèles de turbulence

A cause de la non linéarité des équations de conservation, des inconnues supplémentaires sont apparues à savoir: les tensions turbulentes $-\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ et le flux de chaleur turbulent $\overline{\rho h' \mathbf{u}'}$. Le système d'équations (3.4), (3.5), (3.6) et (3.8) est alors ouvert. La fermeture du système peut être réalisée à l'aide de certains modèles basés sur des hypothèses approximant le plus possible les caractéristiques de la turbulence.

3.4.1. Modèle de Boussinesq - viscosité turbulente

Par analogie avec la loi de Newton reliant la tension visqueuse à la vitesse, Boussinesq [60], propose le premier modèle de turbulence en établissant une relation directe entre la tension turbulente et la vitesse moyenne qui s'écrit, pour une couche limite de fluide incompressible comme:

$$-\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.9)$$

μ_t est le coefficient de viscosité turbulente. u' et v' sont les fluctuations de vitesse selon les directions x et y respectivement. U est la vitesse moyenne selon la direction x .

Remarque 3.2:

Dans le cas d'un écoulement, compressible ou incompressible, plus général que celui de la couche limite, le modèle de Boussinesq est utilisé sous la forme:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} = \mu_t \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (3.10)$$

où k est l'énergie cinétique moyenne de turbulence:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (3.11)$$

Contrairement à la viscosité moléculaire qui est une propriété du fluide, la viscosité turbulente dépend énormément des détails de l'écoulement en question. En effet, elle se trouve affectée par la forme et la nature (rugosité) des frontières solides, de l'intensité de la turbulence du courant loin de la paroi et, peut être de manière significative, de l'effet du développement de l'écoulement. Le modèle de

Boussinesq a été fondé, comme c'est le cas de la loi de Newton, sur l'hypothèse que les axes principaux du tenseur des contraintes turbulentes ou de Reynolds coïncident avec celui du tenseur des taux de déformation moyens. Ainsi, il devient évident que, pour un écoulement avec un changement brutal du taux de déformation moyen, ou pour des écoulements dont les taux de déformation moyens sont très importants, l'approximation de Boussinesq n'est plus valable. Parmi les applications pour lesquelles, l'approximation de Boussinesq n'est plus valable on cite [61]:

- écoulements avec changement brusque du taux de déformation moyen.
- écoulements à travers des surfaces courbées.
- écoulements avec recirculation dans des conduites.
- écoulements de fluides en rotation.
- écoulements tridimensionnels.
- écoulements avec décollement de la couche limite.

3.4.2. Modèles algébriques - longueur de mélange

Les modèles algébriques sont basés sur la notion de longueur de mélange de Prandtl. En effet, par analogie avec la théorie cinétique des gaz, Prandtl [62] représente la turbulence comme une migration latérale des particules fluides (due à la vitesse d'agitation transversale) au cours de laquelle ces particules conservent leur vitesse et donc leur quantité de mouvement sur une longueur (analogue au libre parcours des molécules) appelée longueur de mélange. On montre [56], [61]:

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.12)$$

où l représente la longueur de mélange.

Remarque 3.3 :

La relation (3.12) a constitué la base de toute la recherche sur les modèles de turbulence des vingt années suivantes.

Les expressions de la viscosité turbulente et de la longueur de mélange sont différentes selon qu'on est proche de la paroi ou loin de celle-ci [45], [63].

Pour un écoulement bidimensionnel plus général que celui de la couche limite, l'équation (3.12) s'étend comme suit:

$$\mu_t = \rho l^2 |\omega| \quad (3.13)$$

où ω est la vorticité:

$$\omega = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.14)$$

Pour tenir compte de l'influence de la viscosité moléculaire du fluide sur l'amortissement des fluctuations de la vitesse, Van Driest [64] corrigea la longueur de mélange par un facteur connu sous le nom de facteur d'amortissement de Van Driest et qui est introduit dans tout les modèles algébriques actuellement utilisés.

Cebeci et Smith [63] ont perfectionné le modèle de viscosité turbulente/longueur de mélange de manière à être utilisé pour les couches limites attachées. Leur modèle fait intervenir le facteur d'intermittence de Klebanoff et exige la connaissance des épaisseurs de la couche limite et de déplacement.

Pour éviter les difficultés que peut engendrer le calcul des épaisseurs de déplacement et de la couche limite, particulièrement en présence de chocs et de recirculation, Baldwin et Lomax [45] ont développé un modèle utilisant seulement l'échelle de longueur y_{max} (où la fonction vorticité est maximale) qui est bien définie. Ce modèle est préféré par un grand nombre d'utilisateurs. Ceci ne veut sûrement pas dire que ce modèle est supérieur à celui de Cebeci et Smith au sens physique mais seulement qu'il est le mieux convenable au sens numérique.

Remarque 3.4:

Les modèles algébriques utilisent l'approximation de Boussinesq et calculent la viscosité turbulente en terme de longueur de mélange. Comme la viscosité turbulente et la longueur de mélange dépendent des détails de l'écoulement en question, ces deux quantités doivent alors être spécifiées a priori. Ainsi, les modèles algébriques sont par définition des modèles de turbulence incomplets.

Avantages et inconvénients

La longueur de mélange présente certains avantages comme:

- la simplicité: elle ne requiert pas la résolution d'équations aux dérivées partielles additionnelles.
- la prédictabilité des écoulements: elle permet de prédire une distribution réaliste de la vitesse et des contraintes de cisaillement ainsi que le comportement général des écoulements de couches limites.
- la multitude des résultats: plusieurs expériences utilisant l'hypothèse de longueur de mélange ont été faites et sont disponibles à travers les publications.

Ses inconvénients sont:

- une implication de la viscosité effective qui s'annule là où le gradient de la vitesse moyenne est nul.

- une adéquation quand $\frac{\partial U}{\partial y}$ est très grand et une inadéquation quand $\frac{\partial U}{\partial y}$ est très petit; c'est le cas à proximité du maximum de vitesse tel que dans les jets limités par une frontière solide ou dans les conduites, dans les couches limites avec une turbulence intense du courant loin de la paroi et dans les zones de décollement ou de recirculation.

3.4.3. Modèles à une équation de transport

Le premier modèle à une équation de transport fût formulé par Prandtl [65]. Il relia la viscosité turbulente μ_t à l'énergie cinétique (par unité de masse) des fluctuations turbulentes k comme:

$$\mu_t = \rho k^{1/2} l \quad (3.15)$$

où k est donnée par l'équation de transport suivante:

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_D \rho \frac{k^{3/2}}{l} \quad (3.16)$$

l est la longueur de mélange. σ_k et C_D sont deux coefficients à choisir à priori.

Le terme de gauche de l'équation (3.16) représente le taux de convection. Les termes du membre de droite sont respectivement le taux de diffusion, le taux de production et le taux de dissipation ou de destruction de l'énergie cinétique de turbulence k .

Remarque 3.5 :

Proche de la paroi, la convection et la diffusion sont négligeables. Il se produit alors un équilibre entre la production et la dissipation. Dans ce cas, l'équation (3.16) peut se mettre sous la forme [47]:

$$\tau_{ij} = C_D^{-1/2} \rho l^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad (3.17)$$

Cette dernière équation est équivalente à l'hypothèse de la longueur de mélange. L'hypothèse de la longueur de mélange traduit alors un équilibre local de la turbulence. Ainsi, les modèles algébriques basés sur l'hypothèse de la longueur de mélange sont connus sous le nom de modèles à équilibre local.

En 1967, Bradshaw et al [66] rejettent l'idée de l'utilisation directe de l'approximation de Boussinesq. Ils affirment que, pour une grande variété

d'écoulements, le rapport de la contrainte turbulente de cisaillement τ à l'énergie cinétique de turbulence k est constant:

$$\tau_{xy} \approx 0.3\rho k \quad (3.18)$$

Remarque 3.6:

La relation contrainte-énergie (3.18) reste très limitée, en pratique, elle n'est valable que pour les couches limites externes. En effet, sur la ligne centrale d'une conduite, la contrainte est nulle alors que l'énergie cinétique k est finie.

Plutôt que l'équation de l'énergie cinétique de turbulence, Nee et Kovasznay [67] ont formulé une équation de transport pour la viscosité cinématique $\nu_t = \mu_t/\rho$.

Récemment, en s'inspirant de l'idée de Nee et Kovasznay, Baldwin et Barth [68] et Spalart et Allmaras [69] ont développé d'autres équations de transport de la viscosité cinématique turbulente.

Avantages et inconvénients:

Les modèles à une équation présentent un avantage minime sur les modèles algébriques qui se situe dans une meilleure prédiction des recirculations.

Les inconvénients des modèles à une équation sont: Primo, la longueur de mélange doit être prescrite à priori, ce qui fait que ces modèles restent incomplets. Secondo, proche de la paroi, où la convection et la diffusion ne sont pas importantes, le modèle de longueur de mélange donne une prédiction meilleure et très économique. D'où le point faible des modèles à une équation de transport.

3.4.4. Modèles à deux équations de transport

L'idée du modèle à deux équations de transport vient de Kolmogorov. En effet, en 1942 Kolmogorov [70] introduisit, en plus d'une équation pour l'énergie cinétique de turbulence k , un autre paramètre ω qui représente le taux de dissipation de l'énergie par unité de volume et de temps. La viscosité turbulente, l'échelle de longueur de la turbulence et la dissipation ε sont tel que:

$$\left. \begin{aligned} \mu_t &\sim \rho k/\omega \\ l &\sim k^{1/2}/\omega \\ \varepsilon &\sim \omega k \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

En 1945, Chou [71] proposa de modéliser l'équation exacte pour ε . Dans ce cas, la viscosité turbulente et l'échelle de longueur de turbulence sont respectivement:

$$\left. \begin{aligned} \mu_t &\sim \rho k^2 / \omega \\ l &\sim k^{3/2} / \omega \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

En 1951, Rotta [72] suggéra une équation de transport pour l'échelle de turbulence. Plus tard, en 1968 [73], il proposa une équation de transport pour le produit de k et l . Dans les deux cas, il considère:

$$\left. \begin{aligned} \mu_t &\sim \rho k^{1/2} l \\ \varepsilon &\sim k^{3/2} / l \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Recemment, Zeirman et Wolfshtein [74] considèrent une équation de transport pour le produit de k et le temps de dissipation de la turbulence τ . De même, Spezial, Abid et Anderson [75] ont développé une équation pour τ . Pour ces modèles, on a:

$$\left. \begin{aligned} \mu_t &\sim \rho k \tau \\ l &\sim k^{1/2} / \tau \\ \varepsilon &\sim k / \tau \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Parmi les modèles à deux équations, le plus populaire est le $k - \varepsilon$ développé par Launder et Spalding [47] connu sous le nom du modèle $k - \varepsilon$ standard. Ce dernier a été repris et perfectionné par Launder et Sharma [76] tel qu'utilisé actuellement.

L'idée du modèle $k - \omega$ a été reprise et développée par plusieurs auteurs [77 à 82]. Coakley [83] a développé le modèle $k^{1/2} - \omega$. Le modèle $k - \omega$ constitue le second modèle le plus utilisé des modèles à deux équations de transport.

Avantages et inconvénients:

Contrairement aux modèles algébriques et à une équation de transport qui nécessitent la détermination à priori de la longueur de mélange, les modèles à deux équations de transport utilisent une équation de transport de la longueur de mélange ou de son équivalent. De ce fait, ces modèles sont dits complets.

Le modèle $k - \varepsilon$ est le plus largement utilisé. Il a été appliqué avec succès pour plusieurs écoulements particulièrement les écoulements libres tels que les couches de mélange, les jets et les sillages. Cependant, il reste non précis pour les écoulements avec des gradients de pression positifs. De plus, ce modèle, conçu initialement pour des nombres de Reynolds très élevés donc pour les régions pleinement turbulentes loin des parois solides, reste très difficile à intégrer à travers la région proche de la paroi. En effet, il se trouve incapable de reproduire la loi de paroi pour un simple écoulement de couche limite incompressible sur une plaque plane. De ce fait, les

chercheurs [76, 84, 85, 86], ont établi une version du modèle $k - \varepsilon$ pour des nombres de Reynolds faibles. Cependant, cette version du modèle exige des corrections et des ajustements pour chaque type d'application. Ainsi, en général, les usagers préfèrent utiliser la version standard de $k - \varepsilon$, pour des nombres de Reynolds élevés, couplée à la loi de paroi pour modéliser la région proche de la paroi [49, 50, 51].

Malgré qu'il ne soit pas aussi populaire que le modèle $k - \varepsilon$, le modèle $k - \omega$ présente certains avantages [61]. Il est plus précis pour les couches limites bidimensionnelles pour des gradients de pression variables (positifs ou négatifs). Aussi, sans aucune modification ou correction, ce modèle peut facilement s'adapter à la région proche de la paroi solide. Cependant, contrairement au modèle $k - \varepsilon$, le modèle $k - \omega$ présente un inconvénient. Il est très sensible aux conditions aux limites des courants libres tels que les couches de mélange, les jets et les sillages.

Le reste des modèles à deux équations se trouvent moins validés pour être utilisés particulièrement pour des gradients de pression positifs [61].

Finalement, tout les modèles à deux équations, particulièrement le modèle $k - \omega$, se trouvent inadéquats pour modéliser les interactions ondes de chocs - couches limites, les écoulements à travers des surfaces courbées et les recirculations dans les écoulements dans des conduites à sections non circulaires [61].

3.4.5. Modèle de fermeture du second ordre

Ce type de modèle, fondé par Rotta [72], se passe de l'approximation de Boussinesq. Rotta développa un modèle d'équations aux dérivées partielles gouvernant les contraintes turbulentes. Cette approche est appelée fermeture de second ordre. Ce modèle présente des avantages tels qu'une résolution naturelle des phénomènes physiques, une adaptation automatiquement aux complexités des courbures des lignes de courant ou la rotation des corps rigides et les forces volumiques. Comme ce modèle nécessitait la résolution de sept équations aux dérivées partielles en trois dimensions (une pour l'échelle de turbulence et six pour le tenseur des contraintes de Reynolds), alors cette approche est restée dans l'obscurité jusqu'au développement des ordinateurs vers les années soixantes dix. Parmi les auteurs qui ont contribué au développement de ce modèle on cite: Donaldson et Rosenbaum [87], Daly et Harlow [88], Launder, Reece et Rodi [89], Lumley [90], Speziale [91], [92] et Reynolds [93]. Cependant, le grand nombre d'équations et leur complexités pour les résoudre, fait que l'utilisation de ce modèle reste très restreinte comparativement aux modèles algébriques ou à deux équations de transport.

3.4.6. Modèle RNG

En utilisant la théorie **RNG** (Renormalisation Group Theory), Yakhot et Orszag [94] éliminent les petites échelles, supposées isotropes. Ils proposent ainsi un

modèle $k-\varepsilon$ avec $\nu = \frac{C_\nu k^2}{\varepsilon}$ où les coefficients ont été évalués numériquement à l'aide de cette théorie tels que $C_\mu = 0.0837$ et la constante de von Karman $\kappa = 0.372$. De même, en se basant sur le principe d'équilibre entre la production et la dissipation, ils proposent un modèle algébrique où la viscosité turbulente est définie telle que:

$$\nu_e = \nu \left[1 + H \left(\frac{a\varepsilon L^4}{\nu^3} - C \right) \right]^{1/3} \quad (3.23)$$

avec

$$\varepsilon = \nu_t \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad (3.24)$$

où $a = 0.12$, $C = 75 - 200$, $\nu_e = \nu + \nu_t = \mu/\rho + \mu_t/\rho$ est la viscosité effective (laminaire + turbulente). L et ε sont respectivement l'échelle de longueur de turbulence et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente qui doivent être définis à priori. H est la fonction poids définie telle que:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Ces modèles qui ne font intervenir aucun coefficient expérimental permettent de découpler (ou un couplage faible) les grandes structures anisotropes, qui dominent les régions proches de la paroi, de l'écoulement moyen. Yakhot et Orszag justifient le succès de la modélisation basée sur l'élimination des petites structures par le fait que les régions proches de la paroi sont dominées par les grandes structures anisotropes qui n'interagissent pas directement avec l'écoulement moyen et donc ne contribuent pas à la viscosité turbulente. Ainsi, selon les auteurs, il est possible que le maximum d'énergie cinétique turbulente soit localisée là où la viscosité turbulente est quasiment nulle. La première application du modèle **RNG** a été effectuée par Martinelli et Yakhot en étudiant l'écoulement transonique autour de profils [95]. Cependant, ce modèle introduit une discontinuité de la viscosité turbulente due à la modélisation du taux de dissipation qui fait que la viscosité turbulente prenne une forme cubique (Eq. 3.23). Pour éviter cette discontinuité, une équation de la viscosité turbulente d'ordre quatre a été proposée [96, 97, 98]. Dans ce cas, La viscosité effective ν_e est donnée par:

$$\nu_e^4 - \nu_e \nu^3 - H(\varepsilon L^4 - \nu_e C \nu^3) = 0 \quad (3.26)$$

avec

$$\varepsilon = \nu_e^2 \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad (3.27)$$

L'équation (3.26) possède deux racines imaginaires et deux racines réelles, une positive et une négative. Seule, la racine réelle positive sera maintenue puisque $\nu_e \geq \nu$.

Avantages et inconvénients

Le modèle **RNG** est unique dans toute l'épaisseur de la couche limite. Ceci constitue un avantage important quant à la mise en oeuvre numérique simple et le temps de calcul économique. L'aspect important, de ce modèle réside dans la fonction poids H qui s'annule pour tout les $y^+ \leq 9.2$ (pour $C = 200$ et $\kappa = 0.41$ [98]). Ceci représente bien la région de transition entre la fin de la sous couche visqueuse et le début de la région logarithmique. Ce modèle a pu reproduire correctement le comportement observé expérimentalement dans la région proche de la paroi (région linéaire et logarithmique) [98]. Aussi, la fonction H assure automatiquement la transition laminaire-turbulent ou turbulent-laminaire (qui se produit dans les turbomachines [98]).

Le modèle **RNG** présente deux inconvénients: Primo, il ne peut pas reproduire la région tampon ou inertielle. Ceci est dû au fondement même du modèle. Secondo, pour les écoulements détachés, où la production ne balance pas la dissipation, le modèle doit être ajusté [98].

3.4.7. Choix du modèle de turbulence

A cause de la multiplicité des modèles de turbulence, le choix s'impose alors. En général, un bon modèle de turbulence doit répondre aux critères suivants:

- Domaine de validité assez large.
- Précision élevée
- Temps de calcul économique
- Simplicité

Les modèles algébriques et à deux équations ont été largement utilisés. Les modèles à une équation refont surface. Ces derniers semblent être un bon compromis entre les modèles algébriques, pour une certaine amélioration de la précision et d'extension du domaine de validité, et à deux équations, pour une résolution moins ardue.

Souvent, pour les applications industrielles, l'utilisateur ne s'intéresse pas aux détails de la turbulence mais, plutôt se voit concerné seulement par les effets moyens de

cette turbulence, Ainsi, le choix du modèle serait sûrement basé sur les critères d'économie et de simplicité. En général, dans les applications industrielles, on s'intéresse particulièrement aux coefficients de frottement et de pression le long des parois solides. Dans ce cas, un modèle algébrique peut être suffisant. On peut même dire qu'il est peut être plus efficace, pour prédire la distribution de la pression et du frottement sur les parois solides, qu'un modèle à une ou à deux équations de transport. De plus, il est simple et économique.

L'écoulement dans les éjecteurs constitue une application domestique et industrielle. Le modèle de turbulence utilisé ici, pour la modélisation de cet écoulement, est alors un modèle algébrique (voir détails plus loin).

3.5. Modélisation de l'écoulement turbulent

3.5.1. Modélisation des tensions et des flux de chaleur

En négligeant les fluctuations de la viscosité moléculaire μ et de la conductivité thermique λ , le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\sigma}}$ et le flux de chaleur $\underline{\underline{q}}$, dans les équations moyennes de conservation (3.5) et (3.6), s'écrivent respectivement comme:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}} \right] \approx \mu \left[\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \underline{\underline{I}} \right] \\ \underline{\underline{q}} &= -\lambda \nabla T \approx -\lambda \nabla \tilde{T} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

En utilisant la notion de viscosité turbulente, basée sur l'approximation de Boussinesq, les tensions turbulentes $\underline{\underline{\tau}} = -\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'$ peuvent s'écrire sous la forme:

$$\underline{\underline{\tau}} \approx \mu_t \left[(\nabla \tilde{\mathbf{u}}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \underline{\underline{I}} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \underline{\underline{I}} \quad (3.29)$$

où μ_t est la viscosité turbulente et k est l'énergie cinétique turbulente.

Remarque 3.7 :

En général, dans le cas des modèles algébriques, on ne dispose pas de moyen pour modéliser l'énergie cinétique turbulente k . Ainsi, le terme $-\frac{2}{3} \bar{\rho} k$ dans la relation (3.29) sera ignoré.

De même, par analogie avec la loi de Fourier, le flux de chaleur turbulent $\overline{\mathbf{q}_t} = \overline{\rho \mathbf{h}' \mathbf{u}'}$ peut être approximé comme:

$$\overline{\mathbf{q}_t} = \overline{\rho \mathbf{h}' \mathbf{u}'} \approx -\lambda_t \nabla \tilde{T} \quad (3.30)$$

λ_t est la conductivité thermique turbulente définie telle que:

$$\lambda_t = \frac{\mu_t}{Pr_t} c_p \quad (3.31)$$

où Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent.

Remarque 3.8 :

Meier et Rotta [99] ont déterminé la valeur du nombre de Prandtl turbulent à partir de mesures de température et de vitesse effectuées dans la couche limite sur une plaque plane ou sur le plancher de la veine d'essais d'une soufflerie (donc pour des gradients de pression pratiquement nuls) à des nombres de Mach allant de 1.5 à 4.5 et pour des nombres de Reynolds Re_θ (θ est l'épaisseur de quantité de mouvement) compris entre 4×10^3 et 20×10^3 . Le nombre de Prandtl turbulent obtenu varie de 1.34 à 0.86 depuis la paroi jusqu'à la région pleinement turbulente.

Habituellement, les auteurs supposent que Pr_t est constant. En général, $Pr_t = 0.86 - 0.89$ [56].

En utilisant les relations (3.28) à (3.31), les équations moyennes de conservation (3.4) à (3.5) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \bar{\Sigma} &= \bar{\rho} \mathbf{f} \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{h})}{\partial t} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{U}}) - \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \bar{\Sigma}) + \nabla \cdot \bar{\Phi} &= \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\Sigma} &= (\mu + \mu_t) \left[(\nabla \tilde{\mathbf{u}}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \underline{\underline{I}} \right] \\ \bar{\Phi} &= -(\lambda + \lambda_t) \nabla \tilde{T} = -c_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla \tilde{T} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Ainsi, l'écoulement turbulent de fluides compressibles sera gouverné par le modèle mathématique écrit sous forme adimensionnelle comme suit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \bar{\Sigma} &= \bar{\rho} \mathbf{f} \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{h})}{\partial t} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{U}}) - \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \bar{\Sigma}) + \nabla \cdot \bar{\Phi} &= \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} &= \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\Sigma} &= \left(\frac{\mu}{Re} + \frac{\mu_t}{Re} \right) \left[(\nabla \tilde{\mathbf{u}}) + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{I} \right] \\ \bar{\Phi} &= -\frac{\gamma}{Re} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla \tilde{T} \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

La viscosité turbulente μ_t sera modélisée à l'aide d'un modèle algébrique dans ce qui suit.

3.5.2. Modèle de Baldwin et Lomax

Le modèle de Baldwin et Lomax est un modèle à deux couches où la viscosité turbulente μ_t est définie comme:

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{ti} & \text{si } y \leq y_m \\ \mu_{to} & \text{si } y > y_m \end{cases} \quad (3.36)$$

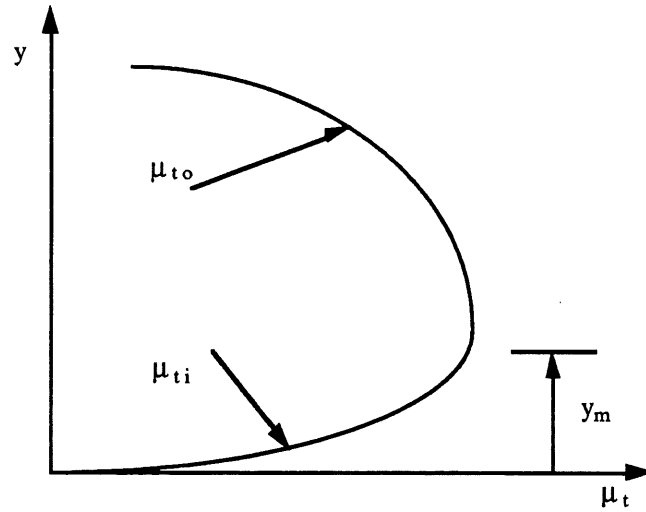


Figure 3.1 Distribution de la viscosité turbulente

y_m est la distance la plus petite, à partir de la paroi, pour laquelle $\mu_{ti} = \mu_{to}$ (Fig. 3.1). Les valeurs de μ_t dans la région interne; μ_{ti} et dans la région externe; μ_{to} sont données respectivement par [45]:

Couche interne:

$$\mu_{ti} = \rho l^2 |\omega| \quad (3.37)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} l &= \kappa y D \\ D &= 1 - \exp(-y^+/A^+) \\ y^+ &= \frac{\rho_p u_\tau y}{\mu_p} \\ u_\tau &= \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}} \\ |\omega| &= \left| \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right| \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

où,

l est la longueur de mélange.

$\kappa = 0.41$ est la constante de von Karman.

y est la distance normale à partir de la paroi.

D est le facteur d'amortissement de Van Driest.

$A^+ = 26$ est la constante de Van Driest.

u_τ est la vitesse de frottement.

τ est la contrainte de cisaillement.
 ω est la vorticité.

Note: l'indice p fait référence à la paroi.

Couche externe:

$$\mu_{to} = \alpha b_1 \rho F_{sill} F_{Kleb} \quad (3.39)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} F_{sill} &= \min \left\{ \begin{array}{l} y_{\max} F_{\max} \\ b_2 y_{\max} \tilde{u}_D^2 / F_{\max} \end{array} \right\} \\ F_{Kleb} &= \left[1 + 5.5 \left(\frac{b_3 y}{y_{\max}} \right)^6 \right]^{-1} \\ F &= y \mid \omega \mid D \\ \tilde{u}_D &= \mid \tilde{\mathbf{u}} \mid_{\max} - \mid \tilde{\mathbf{u}} \mid_{\min} \\ \alpha &= 0.0168, \quad b_1 = 1.6, \quad b_2 = 0.25, \quad b_3 = 0.3 \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

où,

F_{\max} est la valeur maximale de la fonction vorticité F .

F_{Kleb} est le facteur d'intermittence de Klebanoff.

y_{\max} est la distance normale à partir de la paroi où la fonction F est maximale.

Le modèle de Baldwin et Lomax ci-dessus s'écrit, sous forme adimensionnelle, comme suit:

Couche interne:

$$\mu_{ti} = Re \rho l^2 \mid \omega \mid \quad (3.41)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} l &= \kappa y D \\ D &= 1 - \exp(-y^+ / A^+) \\ y^+ &= Re \frac{\rho_p u_\tau y}{\mu_p} \\ u_\tau &= \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}} \\ \mid \omega \mid &= \left| \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right| \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Couche externe:

$$\mu_{to} = \alpha b_1 Re \rho F_{sill} F_{Kleb} \quad (3.43)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} F_{sill} &= \min \left\{ \begin{array}{l} y_{\max} F_{\max} \\ b_2 y_{\max} \tilde{u}_D^2 / F_{\max} \end{array} \right\} \\ F_{Kleb} &= \left[1 + 5.5 \left(\frac{b_3 y}{y_{\max}} \right)^6 \right]^{-1} \\ F &= y \mid \omega \mid D \\ \tilde{u}_D &= \mid \tilde{u} \mid_{\max} - \mid \tilde{u} \mid_{\min} \\ \alpha &= 0.0168, \quad b_1 = 1.6, \quad b_2 = 0.25, \quad b_3 = 0.3 \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

3.5.3. Modélisation des jets libres turbulents

Le jet libre fait partie des écoulements cisailés (couche de mélange, sillage, jets) [43]. C'est un écoulement de fluide issu, généralement, d'une tuyère et qui diffuse dans une ambiance au repos ou en mouvement. Au contact avec l'ambiance, une zone de mélange se forme à la frontière du jet. L'épaisseur de cette zone augmente le long de la direction axiale et résulte, plus loin en aval, un profil de vitesse établi. L'épaisseur (dimension transversale) de ce profil augmente au fur et à mesure que le jet se mélange avec le fluide externe (Fig. 3.2). Les expériences [101] montrent que si les écoulements cisailés sont turbulents alors, l'épaisseur de la zone de mélange ou du sillage augmente proportionnellement à la distance axiale c'est à dire:

$$\delta(x) = Ax$$

où δ est l'épaisseur de la zone de mélange et A est la constante de proportionnalité différente selon qu'il s'agit d'une couche de mélange, d'un jet ou d'un sillage [43], [61]. Cette propriété joue un rôle très important dans la modélisation des écoulements turbulents cisailés.

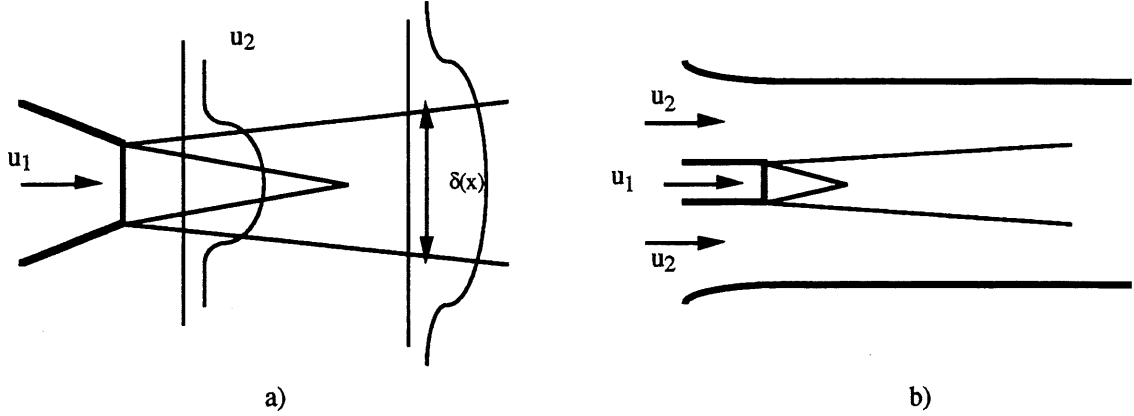


Figure 3.2 a) Jet libre, b) Jet confiné à l'intérieur d'un éjecteur

La modélisation du jet turbulent à l'aide du modèle de longueur de mélange de Prandtl (Eq. 3.12 et 3.13) ne peut pas être satisfaisante. En effet, selon ce modèle, la viscosité turbulente s'annule quand le gradient de vitesse moyenne est égale à zéro; c'est à dire aux points où la vitesse moyenne est maximale ou minimale. Ceci n'est certainement pas le cas, particulièrement, pour les écoulements internes ou cisailés où la turbulence ne disparaît pas aux points du maximum de vitesse (sur l'axe ou plan de symétrie) car, tel que confirmé par les mesures effectuées par Reichardt [101], les fluctuations de vitesses longitudinale et transversale ne sont pas nulles sur l'axe ou plan de symétrie.

Pour contourner cette difficulté, Prandtl [62] a proposé un modèle simple de viscosité turbulente spécifique aux écoulements cisailés. En se basant sur les mesures expérimentales de Reichardt [101], il suppose alors, que les dimensions des couches fluides, se déplaçant dans la direction transversale durant le mélange turbulent, sont du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la zone de mélange. Il donne:

$$\mu_t = K\rho[\tilde{u}_{max}(x) - \tilde{u}_{min}(x)]b(x) \quad (3.50)$$

où \tilde{u}_{max} et \tilde{u}_{min} sont les valeurs maximale et minimale de la vitesse moyenne dans la couche de mélange, b est la moitié de l'épaisseur de la zone de mélange ou du sillage et K est un paramètre empirique adimensionnel. Ce modèle est très convenable pour ce type d'écoulement car il est fonction uniquement de la position axiale et que des résultats excellents peuvent être obtenus si K est considéré constant à travers toute la couche de mélange [42, 43, 44, 61].

Partant de la deuxième hypothèse de Prandtl (Eq. 3.50), et des mesures de Reichardt [101], Schlichting [43] établi un modèle de viscosité turbulente pour les jets libres tels que:

$$\mu_t = K\rho b(x)\tilde{u}_c(x) \quad (3.51)$$

avec

$$K = \begin{cases} 0.037 & \text{si le jet est bidimensionnel} \\ 0.025 & \text{si le jet est axisymétrique} \end{cases}$$

où \tilde{u}_c est la vitesse sur l'axe du jet et b est la distance entre le point sur l'axe et le point où la vitesse est égale à la moitié de la vitesse \tilde{u}_c .

3.5.4. Modèle proposé pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs

En analysant l'écoulement dans un éjecteur, on constate qu'il est constitué d'au moins deux couches de cisaillement: une couche de cisaillement interne formée par le jet et une couche de cisaillement externe formée par l'écoulement externe au jet. De plus, l'écoulement externe est limité par une paroi solide d'où la présence d'une couche limite le long de cette paroi.

Ainsi, un seul modèle de longueur de mélange, telle que le modèle de Baldwin et Lomax, serait insuffisant voir même incapable de modéliser l'écoulement dans un éjecteur. En effet, le modèle de Baldwin et Lomax a été conçu principalement pour les cisaillements simples tels que les écoulements de couches limites. De plus, comme il s'agit d'un écoulement interne, à proximité du maximum de vitesse tel que l'axe ou plan de symétrie, le gradient de vitesse moyenne $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$ peut être très petit ou nul alors que la viscosité turbulente peut être très importante, contrairement à la longueur de mélange qui implique une viscosité turbulente très faible ou nulle (§3.6.2).

Le modèle $k - \varepsilon$ est très adéquat pour les écoulements libres tels que les couches de mélange, les jets et le sillage. Cependant, son intégration proche de la paroi de l'éjecteur reste toujours un problème. En effet, utiliser la loi de paroi logarithmique, pour compléter le modèle $k - \varepsilon$, peut ne pas garantir une modélisation correcte de l'écoulement dans l'éjecteur à cause des zones de recirculation sur la paroi [51, 52].

Le modèle $k - \omega$ s'adapte facilement dans la zone proche de la paroi. Cependant, il est très sensible aux écoulements loin de la paroi en particulier, les jets, les couches de mélange et le sillage [61].

En se basant sur ces constatations physiques et sur des considérations de simplicité et d'économie, nous proposons un modèle de turbulence algébrique, basé sur une formulation nouvelle, pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs. Notre modèle consiste en la combinaison du modèle de Baldwin et Lomax et d'un autre pour le jet basé sur le modèle de Schlichting (Eq. 3.51). Chacun des modèles agit dans sa propre couche (Fig. 3.3):

Dans la couche interne (Fig. 3.3), proche de l'axe de symétrie, constituée principalement par le jet, la viscosité turbulente est prise comme:

$$\mu_t = K\rho b(x)\tilde{u}_c(x) \quad (3.52)$$

ou encore, sous forme adimensionnelle:

$$\mu_t = ReK\rho b(x)\tilde{u}_c(x) \quad (3.53)$$

où Re est le nombre de Reynolds, K est une constante et $\tilde{u}_c(x)$ est la vitesse sur l'axe de symétrie à la position x .

Selon Schlichting (Eq. 3.51), $b(x)$ est la distance, à la position x , à partir de l'axe jusqu'au point où la vitesse est égale à la moitié de la vitesse $\tilde{u}_c(x)$. Cependant, comme le profil des vitesses le long d'une station perpendiculaire à la paroi solide, à une position x donnée, n'est pas lisse, il peut exister alors plusieurs points, sur cette station, où la vitesse est égale à la moitié de la vitesse $\tilde{u}_c(x)$. De plus, ce point peut être proche de la paroi solide, en dehors de la zone du jet, ce qui donnera une valeur de μ_t incompatible. De manière à éviter cette difficulté numérique, nous déterminons la distance $b(x)$ telle que:

$$b(x) = y_c(x) - \bar{y}(x) \quad (3.54)$$

où $y_c(x)$ est la distance, à partir de la paroi solide, jusqu'à l'axe de symétrie et $\bar{y}(x)$ est la distance moyenne, à partir de la paroi solide, définie comme étant le barycentre des vitesses le long d'une station donnée à une position x :

$$\bar{y}(x) = \frac{\sum y_i(x)\tilde{u}_i(x, y_i)}{\sum \tilde{u}_i(x, y_i)} \quad (3.55)$$

où $y_i(x)$ et $\tilde{u}_i(x, y_i)$ sont respectivement la distance à partir de la paroi solide et la vitesse du point i sur la station à une position x donnée.

Remarque 3.9

Avec les définitions (3.54) et (3.55), le point de localisation de la distance $b(x)$ se trouvera toujours proche de l'axe donc proche du point du maximum de vitesse dans le jet.

Dans la couche externe au jet, proche de la paroi solide (Fig. 3.3), définie par la distance $\bar{y}(x)$ à partir de la paroi solide, la viscosité turbulente sera évaluée à l'aide du modèle de Baldwin et Lomax (Eq. 3.41 à 3.44).

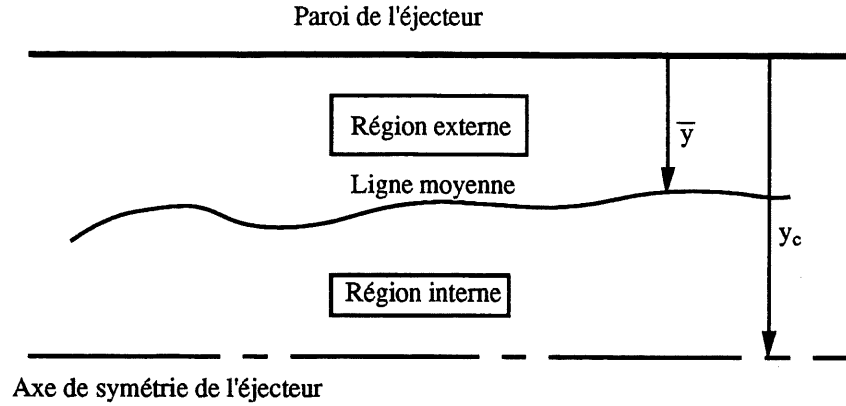


Figure. 3.3 Définition du modèle proposé

Finalement, le modèle de turbulence que nous proposons pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs se résume comme suit:

$$\mu_t(x) = \begin{cases} \min(\mu_{ti}(x), \mu_{to}(x)) & \text{si } 0 \leq y(x) \leq \bar{y}(x) \\ K Re pb(x) \tilde{u}_c(x) & \text{si } \bar{y}(x) \leq y(x) \leq y_c(x) \end{cases} \quad (3.56)$$

avec

$$b(x) = y_c(x) - \bar{y}(x) \quad (3.57)$$

$$\bar{y}(x) = \frac{\sum y_i(x) \tilde{u}_i(x, y_i)}{\sum \tilde{u}_i(x, y_i)} \quad (3.58)$$

où $\mu_{ti}(x)$ et $\mu_{to}(x)$ sont respectivement les viscosités turbulentes interne et externe données par le modèle de Baldwin et Lomax (Eq. 3.41 à 3.44). K est une constante qui sera choisie selon que l'écoulement est bidimensionnel ou axisymétrique [43, 61].

Remarque 3.10

Le modèle proposé ci-haut (Eq. 3.56 à 3.58) reste valable aussi bien pour un écoulement bidimensionnel qu'un écoulement axisymétrique. L'originalité de ce modèle se résume comme suit:

- C'est un modèle à deux couches distinctes; il permet de séparer de manière très efficace la région proche de la paroi et loin de celle-ci.
- Il permet d'introduire la bonne valeur de la viscosité turbulente au bon endroit de l'écoulement.
- Il reste valable pour un jet libre (sans frontière solide) en considérant seulement la partie pour le jet (Eq. 3.53, 3.54 et 3.55).

- Il peut être appliqué aussi bien à un écoulement interne bidimensionnel que axisymétrique en ajustant simplement la constante K

Dans ce travail, nous avons étudié le cas d'un écoulement bidimensionnel. La constante K est prise égale à celle utilisée par Lund et al [42] et Deese et Agarwal [44]: $K = 0.0283$

Sommaire

Notre travail vise des applications de type industriel qui consistent souvent en des écoulements turbulents. Ainsi, en se basant sur les critères d'économie et de simplicité, nous adoptons un modèle algébrique pour la simulation des écoulements internes turbulents. De plus, proche de la paroi, un modèle algébrique est plus précis que le modèle $k - \varepsilon$. Aussi, malgré que le modèle $k - \omega$ s'adapte facilement dans la zone proche de la paroi, il se trouve très sensible aux écoulements loin de la paroi tels que les jets, les couches de mélange et le sillage [61]. Cependant, dans les modèles algébriques tels que le modèle de Baldwin et Lomax, la viscosité turbulente est proportionnelle au gradient de vitesse moyenne $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Or, dans les écoulements internes, à proximité de l'axe ou plan de symétrie, ce gradient de vitesse peut être très faible ou nul. Par conséquent, la viscosité turbulente, selon les modèles algébriques standards, se trouve très faible ou nulle alors que, la turbulence dans cette zone peut être très intense où, une viscosité turbulente très importante est nécessaire. Pour remédier à ce problème, nous avons donc construit un modèle de deux couches: proche de la paroi, ce modèle se réduit au modèle de Baldwin et Lomax et loin de celle-ci, le modèle est équivalent à celui de Schlichting pour les jets libres [43]. Nous devons noter que notre modèle reste valable aussi bien pour un écoulement bidimensionnel qu'axisymétrique.

CHAPITRE 4

FORMULATION DU MODÈLE NUMÉRIQUE

4.1. Introduction

Les équations de Navier-Stokes et d'Euler, développées précédemment (Chap. 2 et 3) forment un système de quatre équations non linéaires et couplées. Ces équations sont tellement difficiles à résoudre analytiquement qu'il devient nécessaire de trouver une solution par voie numérique. Les méthodes numériques permettent de transformer le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. Parmi ces méthodes on cite: la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis.

Ici, les équations de Navier-Stokes et d'Euler sont discrétisées par une méthode d'éléments finis en espace et de différence finies en temps. Dans une première partie on présentera la formulation variationnelle du modèle mathématique développé aux chapitres 2 et 3. Les conditions aux limites des problèmes d'écoulements internes seront discutées dans une deuxième partie. La discrétisation par éléments finis en espace et différences finies en temps fera l'objet d'une troisième partie. La technique de calcul numérique de la viscosité turbulente sur un maillage non structuré sera présentée dans une quatrième partie. Ceci sera suivi par une présentation de la forme matricielle du système algébrique et enfin, on présentera la méthode de résolution du système algébrique.

4.2. Formulation variationnelle

La formulation variationnelle de type Galerkin consiste à pondérer le système d'équations aux dérivées partielles par des fonctions de pondération (variations infinitésimales des variables indépendantes) de manière que l'intégration sur tout le domaine fluide Ω soit nulle. Ainsi, en multipliant successivement les équations (2.22) par les variations infinitésimales δp , $\delta \mathbf{U}$ et δh des variables indépendantes p , \mathbf{U} et h respectivement, nous écrivons:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \delta p \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} \right) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta \mathbf{U} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \underline{\underline{\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}}} - \rho \mathbf{f} \right) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta h \left(\frac{\partial \rho h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{U}) - \underline{\underline{\nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u})}} + \underline{\underline{\nabla \cdot \mathbf{q}}} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} \right) d\Omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Afin de réduire l'ordre de dérivation de deux à un et faire apparaître des conditions aux limites naturelles, les termes soulignés sont alors intégrés par partie et le système variationnel (4.1) devient:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \delta p \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} \right) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta \mathbf{U} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{f} \right) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \nabla(\delta \mathbf{U}) : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{U} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta h \left(\frac{\partial \rho h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{U}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} \right) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \nabla(\delta h) \left[(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{q} \right] d\Omega - \\ \int_{\Gamma} \delta h \left[(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta h (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

L'écriture sous forme vectorielle du système (4.2) est:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{W} \cdot \left[\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) - \tilde{\mathcal{F}} \right] + \mathbf{W}_{,i} \cdot \left[\tilde{\mathbf{F}}_i^{diff}(\mathbf{Y}) \right] \right\} d\Omega \\ = \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{W} \cdot \left[\tilde{\mathbf{F}}_i^{diff}(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{n}_i \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $\mathbf{W} = (\delta p, \delta \mathbf{U}, \delta h)^t$ est le vecteur des fonctions de pondération. Et sous la forme quasi-linéaire, on écrit:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{W} \cdot [\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_i - \tilde{\mathcal{F}}] + \mathbf{W}_{,i} \cdot [\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j}] \right\} d\Omega \\ = \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{W} \cdot [(\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j}) \cdot \mathbf{n}_i] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.4)$$

Remarque 4.1 :

Les formes variationnelles des équations d'Euler, sous la forme vectorielle et quasi-linéaire, se déduisent respectivement de la forme (4.3) et (4.4) comme suit:

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathbf{W} \cdot [\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) - \tilde{\mathcal{F}}] \right\} d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathbf{W} \cdot [\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_i - \tilde{\mathcal{F}}] \right\} d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

4.3. Conditions aux limites

Les écoulements étudiés dans ce travail s'effectuent dans des domaines confinés c'est à dire; des écoulements internes dans des tuyères ou des éjecteurs. On a alors à préciser, pour chaque cas d'écoulement, quatre types de conditions aux limites à savoir:

- conditions d'entrée d'écoulement.
- conditions de sortie d'écoulement.
- conditions de symétrie.
- conditions aux parois solides.

Le nombre de conditions d'entrée ou de sortie d'écoulements dépend de la nature locale de l'écoulement; supersonique ou subsonique.

4.3.1. Conditions d'entrée d'écoulement

Si l'écoulement à l'entrée est subsonique alors, trois conditions sont à imposer:

- Pression totale ou de stagnation; P_0 .
- Température totale ou de stagnation; T_0 .

- Vitesse transversale nulle; $u_2 = 0$.

Pour un écoulement supersonique à l'entrée, un nombre de Mach est alors imposé et par conséquent, quatre conditions sont nécessaires:

- Pression totale; P_0 .
- Température totale; T_0 .
- Vitesse transversale nulle; $u_2 = 0$.
- vitesse axiale u_1 correspondant au nombre de Mach imposé.

Remarque 4.2 :

Imposer la température totale T_0 revient directement à imposer l'enthalpie totale h correspondante telle que:

$$h = c_p T_0$$

ou encore sous forme adimensionnelle:

$$h = \gamma T_0 \quad (4.7)$$

La pression totale P_0 n'est pas une variable indépendante. Cependant, la valeur P_0 désirée est assurée en imposant la pression statique correspondante comme suit:

$$p = P_0 - \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = P_0 - \frac{|\mathbf{U}|^2}{2\rho} \quad (4.8)$$

Ainsi, la pression statique p sera imposée de manière non linéaire. Elle est alors actualisée tout le long des calculs de façon à garantir la valeur de la pression totale désirée.

Les conditions aux limites à l'entrée sont de type Dirichlet sur la vitesse, la pression et la température (donc l'enthalpie). Dans ce cas, les termes de contour dans la forme variationnelle (4.2) s'annulent.

4.3.2. Conditions de sortie d'écoulement

Pour un écoulement subsonique à la sortie, une seule condition est imposée. En général, pour les écoulements internes, cette condition correspond à la pression statique à la sortie.

Dans le cas d'un écoulement supersonique à la sortie, aucune condition de Dirichlet n'est imposée.

Remarque 4.3 :

A la sortie, l'écoulement est supposé établi. Ainsi, une condition de Neuman $(\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} = 0$ implicite est imposée. Les termes de contour s'annulent alors dans la formulation variationnelle (4.2).

4.3.3. Condition de symétrie

Les écoulements étudiés sont des écoulements bidimensionnels à symétrie plane. Seule la moitié du domaine fluide est alors considéré et la condition de symétrie est assurée en imposant la vitesse (donc la quantité de mouvement) transversale à zéro le long du plan de symétrie.

Remarque 4.4 :

Les termes de contour dans la forme variationnelle (4.2) s'annulent le long du plan de symétrie.

4.3.4. Conditions aux parois solides

Les conditions aux parois solides sont différentes selon que l'écoulement est visqueux ou non.

Écoulement non visqueux

En écoulement non visqueux, les particules fluides doivent glisser au contact d'une paroi solide. Cette condition de glissement est assurée grâce à la condition d'imperméabilité de la paroi qui se traduit par une vitesse normale du fluide nulle le long de cette paroi:

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{U} \cdot \underline{n} = 0$$

où \underline{n} est le vecteur normal unitaire extérieur.

Écoulement visqueux

Si l'écoulement est visqueux, au contact d'une paroi solide, la viscosité impose que les particules fluides restent attachées à cette paroi. La vitesse du fluide est alors nulle sur la paroi:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{U} = 0$$

Aussi, si l'écoulement s'effectue sans transfert de chaleur avec l'entourage alors, dans les deux cas d'écoulements, ceci est assuré,

- soit en imposant une répartition uniforme de la température, égale à la température de l'entourage, sur la paroi d'où, une paroi isotherme,
- soit en isolant la paroi de l'extérieur en considérant que le flux de chaleur normal à la paroi soit nul. La paroi est alors dite adiabatique.

Remarque 4.5 :

Les termes de contour dans la forme variationnelles (4.2) s'annulent sur une paroi adiabatique ou isotherme, où des conditions de non glissement sont imposées.

4.4. Discrétisation des équations intégrales

Le système variationnel (4.2) doit être transformé en un système algébrique, pour une résolution numérique, à l'aide d'une discrétisation spatio-temporelle. Les dérivées temporelles seront discrétisées en utilisant la méthode des différences finies. Les variables et leurs dérivées spatiales seront discrétisées à l'aide de la méthode des éléments finis.

4.4.1. Discrétisation spatiale

Le domaine fluide $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est subdivisé en des sous domaines Ω_e appelés éléments finis. L'intégrale sur le domaine sera alors une combinaison linéaire des intégrales sur chaque élément fini du domaine:

$$\int_{\Omega} f(x) \, d\Omega = \sum_{i=1}^{nelt} \int_{\Omega_e} f(x) \, d\Omega_e \quad (4.9)$$

Le domaine Ω est défini géométriquement par un nombre fini de points appelés noeuds géométriques qui définissent alors la géométrie des éléments. Chaque élément Ω_e doit être défini analytiquement, de manière unique, en fonction des noeuds géométriques. La partition du domaine est basée sur deux règles principales [1]:

i/ Deux éléments distincts ne peuvent avoir qu'un seul point commun (éléments à une dimension), ou qu'une seule arête commune (éléments à deux dimensions), ou qu'une seule surface commune (éléments à trois dimensions).

ii/ L'ensemble des éléments doit constituer un domaine assez proche du domaine réel.

Afin de simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, nous utilisons alors la notion d'élément de référence. Un élément de référence Ω_o est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel Ω_e par une transformation géométrique τ^e .

$$\tau^e : \xi \longrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi, x, y, z, \dots) \quad (4.10)$$

Remarque 4.6 :

L'élément de référence est appelé encore élément parent. La transformation τ^e peut traduire un simple changement de variables $\mathbf{X}(x, y, z) \longrightarrow \xi(\xi, \eta, \zeta)$. ξ peut être considéré comme un système de coordonnées local lié à chaque élément.

Une quantité quelconque $V(\mathbf{X})$ est approximée sur chaque élément réel Ω_e comme:

$$V(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{X}) V_i(\mathbf{X}) = \langle N(\mathbf{X}) \rangle \{V_n\} \quad (4.11)$$

où V_i sont les valeurs de la variable V aux noeuds de l'élément. Ces valeurs sont appelées encore variables nodales. $N_i(\mathbf{X})$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel Ω_e définies telles que:

$$N_i(X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.12)$$

L'approximation correspondante sur l'élément de référence Ω_o sera:

$$V(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) V_i(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{V_n\} \quad (4.13)$$

avec

$$\tau^e : \xi \longrightarrow \mathbf{X}(\xi) = [\langle \bar{N}(\xi) \rangle] \mathbf{X}_n \quad (4.14)$$

où $N_i(\xi)$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence et $\bar{N}_i(\xi)$ sont les fonctions de transformation géométrique de l'élément réel Ω_e en élément de référence Ω_o .

Remarque 4.7 :

Les fonctions $N_i(\mathbf{X})$ dépendent fortement des noeuds géométriques de l'élément; elles sont donc différentes pour chaque élément. Par contre, les fonctions $N_i(\xi)$ sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel; elles peuvent donc être utilisées pour tout les éléments ayant le même élément de référence.

Si les noeuds géométriques coïncident avec les noeuds d'interpolation des variables, les fonctions $\bar{N}_i(\xi)$ et $N_i(\xi)$ sont alors identiques et l'élément est dit isoparamétrique.

Toutes les dérivées spatiales dans le système de coordonnées réelles \mathbf{X} seront transformées en des dérivées dans le système de référence ξ à travers la matrice Jacobienne telle que, pour les dérivées premières:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}} \right\} = [j] \left\{ \frac{\partial V}{\partial \xi} \right\} \quad (4.15)$$

où $[j]$ est la matrice inverse de la matrice Jacobienne $[J]$:

$$[j] = [J]^{-1} = \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right] \quad (4.16)$$

avec

$$[J] = \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right] \quad (4.17)$$

Finalement, toute intégrale élémentaire sur l'élément réel sera évaluée sur l'élément de référence comme suit:

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{X}) \, d\mathbf{X} = \int_{\Omega_o} f(\xi) \det(J) \, d\xi \quad (4.18)$$

Remarque 4.8 :

L'intégration sur un élément de référence sera calculée numériquement à l'aide de la technique de Hammer utilisant sept points d'intégration.

4.4.2. Discrétisation temporelle

Les simulations numériques effectuées dans ce travail visent à obtenir des solutions stationnaires (régime permanent). Cependant, les équations de conservation stationnaires sont de nature mixte hyperbolique-elliptique dans le cas des équations de Navier-Stokes et de nature différente: elliptique, parabolique ou hyperbolique, dans le cas des équations d'Euler, selon que le nombre de Mach local est subsonique, sonique ou supersonique respectivement. Ce changement de nature rend alors la résolution des équations de conservation stationnaires difficile. Pour éviter cette difficulté, nous résolvons alors les équations de Navier-Stokes ou d'Euler instationnaires où la solution évolue dans le temps jusqu'à convergence correspondant au régime permanent. Nous vérifions ce régime en satisfaisant la conservation du débit entre l'entrée et la sortie du domaine fluide considéré.

Les dérivées temporelles sont discrétisées à l'aide de la méthode des différences finies. Le schéma de discrétisation temporelle utilisé est le schéma d'Euler implicite. Suivant ce schéma, la dérivée temporelle d'une variable quelconque $V(t)$ s'écrit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} \quad (4.19)$$

où Δt est le pas de temps.

4.4.3. Choix de l'élément

A cause de sa flexibilité pour modéliser des géométries de formes complexes et d'adaptation de maillages, l'élément triangulaire reste, sans doute, l'élément le plus utilisé pour la modélisation des problèmes de mécanique des fluides bidimensionnels. Cependant, le degré de ses fonctions d'interpolation doit être choisi de manière à bien modéliser les phénomènes physiques et par conséquent d'améliorer la solution approchée du problème considéré. En effet, l'expérience a montré que, pour les écoulements incompressibles, une approximation du même ordre pour la pression et la vitesse engendre de fortes oscillations dans le champ de pression [102]. Un remède à ce problème consiste à choisir un espace d'approximation moins riche pour la pression. De même, pour des écoulements compressibles simples, Bristeau et al [19], Fortin et Soulaïmani [103] et Pironneau et Rappaz [104] ont démontré

la nécessité d'une approximation d'ordre inférieur pour la densité. Une condition précise de stabilisation peut être fournie par une ou plusieurs conditions *Inf - Sup* [105].

Ainsi, pour satisfaire à la stabilité de l'élément et la condition *Inf - Sup*, l'élément utilisé est un triangle à six noeuds avec une approximation quadratique (six noeuds) pour les composantes de la quantité de mouvement et de la vitesse et, linéaire (trois noeuds) pour les autres variables (Fig. 4.1):

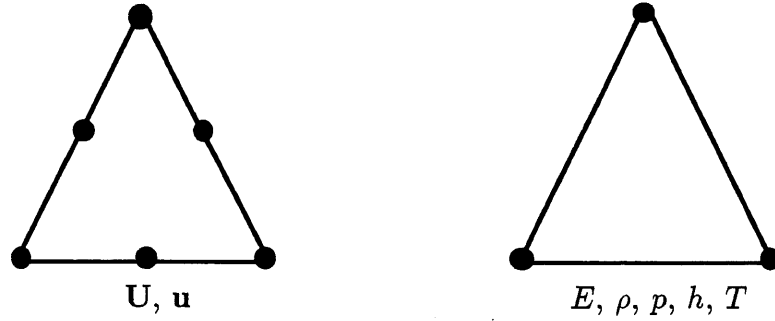


Figure. 4.1 Éléments de discrétisation spatiale

L'élément choisi étant isoparamétrique (les noeuds d'interpolation coïncident avec les noeuds géométriques), les fonctions d'interpolation linéaires et quadratiques sont respectivement [1]:

$$\left. \begin{aligned} \langle N \rangle &= \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \\ &\quad \langle \lambda \quad \xi \quad \eta \rangle \\ \langle N^* \rangle &= \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \rangle \\ &\quad \langle \lambda(2\lambda - 1) \quad 4\xi\lambda \quad \xi(2\xi - 1) \quad 4\xi\eta \quad \eta(2\eta - 1) \quad 4\eta\lambda \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

où $\lambda = 1 - \xi - \eta$

les variables indépendantes U , p et h et leurs variations δU , δp et δh seront interpolées comme suit:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \langle N^* \rangle \{U_1\} & \delta U_1 &= \langle N^* \rangle \{\delta U_1\} \\ U_2 &= \langle N^* \rangle \{U_2\} & \delta U_2 &= \langle N^* \rangle \{\delta U_2\} \\ p &= \langle N \rangle \{p\} & \delta p &= \langle N \rangle \{\delta p\} \\ h &= \langle N \rangle \{h\} & \delta h &= \langle N \rangle \{\delta h\} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Les variables auxiliaires telles que la vitesse u , la température T et la densité ρ seront exprimées en fonction des variables indépendantes ensuite seront interpolées comme suit:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \langle N^* \rangle \{u_1\} \\ u_2 &= \langle N^* \rangle \{u_2\} \\ T &= \langle N \rangle \{T\} \\ \rho &= \langle N \rangle \{\rho\} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

4.5. Calcul numérique de la viscosité turbulente

Le modèle de Baldwin et Lomax et le modèle pour les jets, développés au chapitre 3, sont des modèles algébriques simples à mettre en oeuvre numérique, puisqu'il ne s'agit que d'ajouter une viscosité turbulente à la viscosité réelle du fluide. Ceci peut alors se faire par l'ajout de quelques lignes supplémentaires de programmation dans un code laminaire déjà existant. Cette viscosité turbulente, telle que donnée par ces modèles, est définie le long d'une ligne perpendiculaire à la paroi solide et par conséquent, les paramètres tels que la distance normale à partir de la paroi, les valeurs de F_{max} , y_{max} , \tilde{u}_{max} , \tilde{u}_{min} , b , etc ... (voir chapitre 3), intervenant dans le calcul de cette viscosité, doivent être évaluées le long de chaque ligne perpendiculaire à la paroi solide. Cependant, en présence d'un maillage non structuré, le calcul de ces paramètres devient la difficulté numérique majeure des modèles algébriques; car presque chaque noeud du maillage définit une station propre à lui.

Parmi les techniques de calcul de la viscosité turbulente, on cite: la technique traditionnelle, la technique de Rostand [106] et la technique de Pan et Cheng [107].

La technique traditionnelle consiste à:

- définir la station passant par un noeud donné et normale à la paroi solide.
- sélectionner et stocker les éléments que coupe cette station et les coordonnées des milieux des points d'intersections de la station avec ces éléments.
- interpoler les valeurs aux noeuds réels aux points d'intersections.
- évaluer la viscosité turbulente le long de cette station et l'interpoler au noeud définissant cette station.

Cette technique présente des inconvénients majeurs tels que le stockage et le temps de calcul énormes.

La technique de Rostand [106] consiste à:

- considérer les normales (stations) issues du milieu de chaque arête sur la paroi solide.
- sélectionner et stocker les éléments que chaque normale passe à travers et les coordonnées du milieu des points d'intersections de chaque normale avec chaque élément.

- repérer et stocker, pour chaque noeud réel, les normales voisines les plus proches (à gauche et à droite) et les distances de ces normales au noeud considéré.
- déterminer et stocker les coordonnées du point d'intersection de la perpendiculaire, passant par un noeud, avec chaque normale voisine à ce noeud, ainsi que les points, sur la normale, les plus proches de ce point d'intersection.
- interpoler les valeurs aux noeuds réels aux points composants chaque normale.
- évaluer la viscosité turbulente le long de cette normale.
- interpoler cette viscosité turbulente au point d'intersection de la perpendiculaire, passant par le noeud, avec la normale.
- et enfin, associer cette viscosité turbulente au noeud réel par une interpolation entre les deux normales voisines.

La technique de Rostand ci-dessus présente un avantage concernant le stockage, puisqu'en repérant les normales ainsi que les points les composants de manière séquentielle, on aura alors besoin de connaître, pour chaque noeud réel, uniquement le numéro de la station à sa gauche et les points directement en bas de chaque point d'intersections des perpendiculaires, passant par le noeud, avec les stations voisines. L'inconvénient de cette technique peut être la perte de précision suite à la série d'interpolations.

La technique de Pan et Cheng [107] consiste à:

- définir un ensemble de bandes issues des deux extrémités de chaque arête sur la paroi solide.
- les éléments ayant le centre de gravité à l'intérieure d'une même bande seront considérés comme des éléments du même groupe.
- la distance perpendiculaire à la paroi solide (ou à la ligne centrale du sillage) à partir du centre de gravité de chaque élément est prise comme une échelle de longueur pour le calcul de la viscosité turbulente.
- le maximum et/ou le minimum des paramètres, intervenant dans le calcul de la viscosité turbulente, sera localisé à l'intérieure de chaque bande qu'on associe alors aux éléments appartenant à cette bande.

Cette technique présente un avantage intéressant puisqu'elle ne fait aucune interpolation. La viscosité turbulente est calculée directement sur le maillage non structuré. Cependant, ces bandes doivent être le plus étroites possibles pour obtenir une bonne approximation de la viscosité turbulente. Ceci, fait que les arêtes sur la paroi solide soient les plus courtes possibles, qui peuvent engendrer des maillages énormes inutilement car, un maillage pour la turbulence doit être plutôt fin dans le sens transversal de l'écoulement.

La technique de calcul numérique de la viscosité turbulente utilisée ici est une variante de la technique de Rostand. Au lieu de considérer des éléments, nous considérons dès le départ des arêtes. Pour chaque station (normale issue du milieu de l'arête sur la paroi solide), nous avons alors à stocker les numéros des noeuds extrémités de l'arête ($N_1 - N_2$) coupant cette station et le paramètre s/l nécessaire

pour l'interpolation du noeud réel vers le point sur la station où l est la longueur de cette arête et s est la distance du point d'intersection, avec la station, au premier noeud extrémité de l'arête (Fig. 4.2). Les stations et les points n les constituants étant stockés de manière séquentielle ainsi, pour chaque noeud réel, nous avons à stocker uniquement le numéro de la station S à sa gauche et les numéros n et n' des points directement en bas de chaque point d'intersections des perpendiculaires, passant par le noeud donné, avec les stations voisines ainsi que les paramètres nécessaires aux interpolations du point sur la station vers le noeud réel: $h / (h + h_1)$ sur la station à gauche, $h' / (h' + h'_1)$ sur la station à droite et $d / (d + d')$ entre les deux stations (Fig. 4.2). Ces variables sont calculées une fois, pour un maillage donné, et sont regroupées sous forme de deux fichiers: un fichier renfermant les données relatives aux stations et un fichier renfermant les données relatives aux noeuds réels.

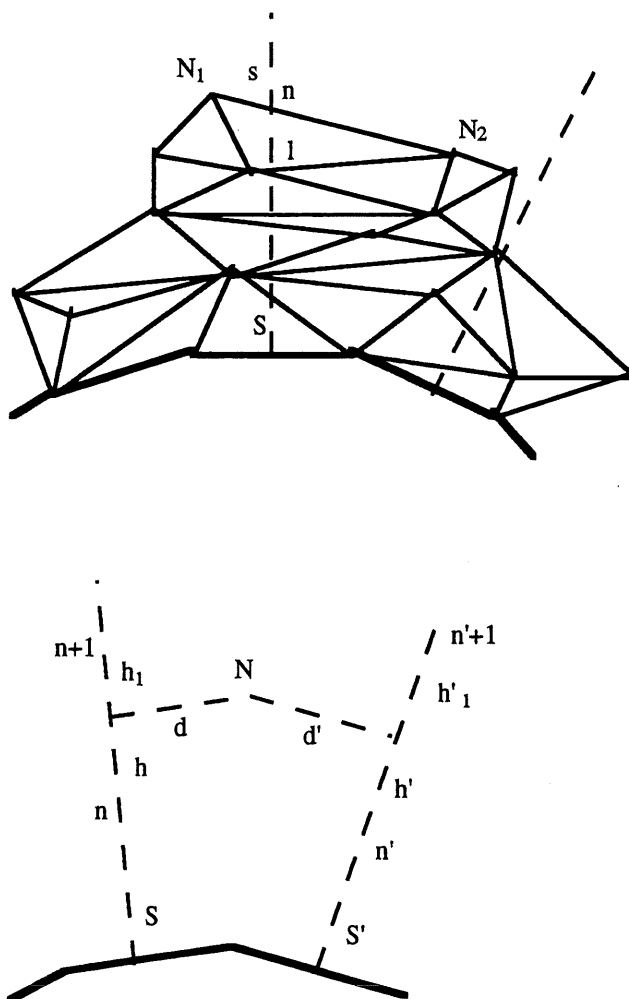


Figure. 4.2 Technique de calcul de la viscosité turbulente

4.6. Forme matricielle

La discrétisation spatio-temporelle et l'intégration numérique sur un élément, de la forme variationnelle (4.2), conduit à un système matriciel élémentaire. L'assemblage des contributions élémentaires donne un système matriciel global qui s'écrit sous la forme:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{Y})] \{\mathbf{Y}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.23)$$

où $[\mathbf{K}(\mathbf{Y})]$ est la matrice globale incluant la matrice rigidité et la matrice masse globales, $\{\mathbf{Y}\}$ est le vecteur des degrés de liberté global et $\{\mathbf{F}\}$ est le vecteur source global.

4.7. Méthode de résolution

Le système (4.23) est fortement non linéaire. Ces non linéarités sont dues essentiellement aux termes de convection et à l'état compressible du fluide. D'autres non linéarités sont dues aux termes additionnels engendrés par les techniques de stabilisation (voir Chapitre 5). La matrice $[\mathbf{K}(\mathbf{Y})]$ se trouve donc une matrice creuse, non linéaire, non symétrique et de grande taille. Une méthode de résolution itérative, plutôt que directe, est alors nécessaire. Dans ce qui suit, on exposera la méthode de Newton-Raphson et la méthode *GMRES* (Generalized Minimal RESidual) développée par Saad et Shultz [108]. Ceci sera suivi par la méthode de préconditionnement utilisée.

4.7.1. Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative qui consiste à trouver \mathbf{Y} tel que le résidu:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{Y})\} = \{\mathbf{F}\} - [\mathbf{K}(\mathbf{Y})] \{\mathbf{Y}\} \quad (4.24)$$

soit nul à une itération donnée.

Soit à l'itération n , le résidu non nul:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)\} = \{\mathbf{F}\} - [\mathbf{K}(\mathbf{Y}_n)] \{\mathbf{Y}_n\} \neq 0 \quad (4.25)$$

Le problème revient donc à trouver $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \delta\mathbf{Y}$ tel que le résidu soit nul à l'itération $n + 1$:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_{n+1})\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_n + \delta\mathbf{Y})\} \approx 0 \quad (4.26)$$

Le développement, en série de Taylor à l'ordre un, du résidu $\{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)\}$ permet d'écrire:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_n + \delta\mathbf{Y})\} \approx \{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)\} + \left[\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)}{\partial \mathbf{Y}} \right] \{\delta\mathbf{Y}\} \quad (4.27)$$

il vient,

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)}{\partial \mathbf{Y}} \right] \{\delta\mathbf{Y}\} = -\{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)\} \quad (4.28)$$

Ainsi, trouver \mathbf{Y}_{n+1} revient à trouver $\delta\mathbf{Y}$ tel que le système linéaire suivant soit satisfait:

$$[\mathcal{J}(\mathbf{Y}_n)] \{\delta\mathbf{Y}\} = -\{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)\} \quad (4.29)$$

où

$$[\mathcal{J}(\mathbf{Y}_n)] = \left[\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)}{\partial \mathbf{Y}} \right] \quad (4.30)$$

est la matrice Jacobienne associée au résidu $\{\mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)\}$.

L'algorithme de résolution de Newton-Raphson se résume comme suit:

Algorithme de Newton-Raphson

1. *Début :*

Choisir une solution approchée \mathbf{Y}_0

2. *Itération :* Pour $n = 1, 2, \dots$, jusqu'à convergence

Résoudre $\mathcal{J}_n \delta_n = -\mathbf{R}_n$

où $\mathcal{J}_n = [\mathcal{J}(\mathbf{Y}_n)]$, $\delta_n = \{\delta\mathbf{Y}\}$ et $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)$

3. *Former la solution approchée :*

$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \delta_n$

4. *Redémarrer :*

Si le critère de convergence est satisfait, s'arrêter.

Sinon, continuer la boucle au point 2.

Remarque 4.9 :

La résolution du système (4.23), à l'aide de la méthode de Newton-Raphson, est évidemment une tâche très ardue et très couteuse en temps de calcul et, aussi très encombrante en terme de mémoire requise puisque la résolution du système linéaire (4.29) nécessite le calcul, l'assemblage et la triangularisation de la matrice $\mathcal{J}(\mathbf{Y}_n)$ à chaque itération et ceci jusqu'à convergence. Une manière d'éviter ces inconvénients consiste à utiliser la méthode *GMRES* qui permet de résoudre le système linéaire (4.29) itérativement dans un sous espace de Krylov où, la connaissance explicite de la matrice \mathcal{J} ne sera plus nécessaire, mais seulement le résultat de l'action de cette matrice sur les directions Z constituant le sous espace de Krylov.

4.7.2. Méthode *GMRES*

La méthode *GMRES* a été développée par Saad et Schultz [108]. C'est une méthode de résolution itérative de systèmes linéaires. Cette méthode, couplée avec la méthode de Newton-Raphson, permet d'éviter le calcul explicite et le stockage de la matrice \mathcal{J}_n [109]. C'est la méthode *GMRES* non linéaire utilisée par plusieurs chercheurs [9, 10, 22, 24, 110, 111, etc ...].

Résoudre le système (4.29), par la méthode *GMRES* non linéaire, revient à trouver, à l'itération n , une solution approchée de la forme:

$$\delta_n = \delta_n^0 + z_n \quad (4.31)$$

où δ_n^0 est une solution initiale. Le système correspondant sera:

$$\mathcal{J}_n(\delta_n^0 + z_n) = -\mathbf{R}_n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{J}_n z_n = \mathbf{r}_n^0 \quad (4.32)$$

où \mathbf{r}_n^0 est le résidu initial. z_n est un élément du sous espace de Krylov \mathcal{K}_k , de dimension k , associé au résidu \mathbf{r}_n^0 et à la matrice Jacobienne \mathcal{J}_n :

$$\mathcal{K}_k = \text{span} \{ \mathbf{r}_n^0, \mathcal{J}_n \mathbf{r}_n^0, \dots, \mathcal{J}_n^{k-1} \mathbf{r}_n^0 \} \quad (4.33)$$

Le problème revient donc à trouver une solution approchée de la forme:

$$\delta_n^k = \delta_n^0 + z_n^k \quad (4.34)$$

telle que:

$$\| \mathbf{r}_n^0 - \mathcal{J}_n z_n^k \|_2 = \min_{z \in \mathcal{K}_k} \| \mathbf{r}_n^0 - \mathcal{J}_n z \|_2 \quad (4.35)$$

L'algorithme de la méthode *GMRES* non linéaire se résume ainsi, comme suit:

Algorithme *GMRES* non linéaire

1. *Début* :

Choisir \mathbf{Y}_0

Choisir δ_n^0

Poser $n = 0$

2. *Démarrage* :

Choisir une tolérance ε_n

Calculer le paramètre σ , pour le calcul de la quantité $\mathcal{J}_n v$,
(voir équations (4.36 et 4.37) ci-dessous)

Calculer $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}(\mathbf{Y}_n)$

Calculer $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_n - \mathcal{J}_n \delta_n^0$

Calculer $v_1 = \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|_2$

Poser $j = 1$

3. *Itération* : Pour $j = 1, 2, \dots, k$ faire :

$h_{i,j} = (\mathcal{J}_n v_j, v_i) \quad i = 1, 2, \dots, j$

$\hat{v}_{j+1} = \mathcal{J}_n v_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} v_i$

$h_{j+1,j} = \|\hat{v}_{j+1}\|_2$

$v_{j+1} = \hat{v}_{j+1} / h_{j+1,j}$

Construire la j -ième colonne de la matrice \bar{H}_j

et mettre à jour sa factorisation $Q_j R_j$

Calculer la norme résiduelle ϱ_j de la solution δ_n^j

Si $\varrho_j \leq \varepsilon$ ou si $j = k_{max}$ poser $k = j$ et aller au point 4

Sinon, poser $j = j + 1$ et aller au point 3

4. *Former la solution approchée* :

Trouver le vecteur y_k qui minimise $\|e - \bar{H}_k y\|_2$ sur \mathbb{R}^k

Calculer $\delta_n^k = \delta_n^0 + V_k y_k$

Mettre à jour $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \delta_n^k$

5. *Redémarrer* :

Si \mathbf{Y}_{n+1} est satisfaisante, s'arrêter.

Sinon, poser $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_{n+1}$, $\delta_n^0 = \delta_n^k$ et aller au point 2.

Les produits matrice-vecteur $\mathcal{J}_n v$ peuvent être approchés numériquement par:

$$\mathcal{J}_n v = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{Y} + \sigma v) - \mathbf{R}(\mathbf{Y})}{\sigma} \quad (4.36)$$

où le coefficient σ doit être bien choisi en fonction du résidu $\mathbf{R}(\mathbf{Y})$ de manière à assurer une bonne approximation de la dérivée directionnelle et une stabilité numérique. En effet, Brown [112] a donné des conditions suffisantes sur σ afin d'assurer une convergence locale de l'algorithme de Newton. Ici, σ est choisi tel que [55]:

$$\sigma = \epsilon(\|\mathbf{R}(\mathbf{Y})\|_2 + \epsilon) \quad (4.37)$$

où $\epsilon = 10^{-6}$.

Remarque 4.10 :

L'étape 3 dans l'algorithme ci-dessus constitue l'algorithme d'Arnoldi, qui utilise une orthogonalisation de Gram Schmidt, pour construire une base orthonormée $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, du sous espace de Krylov \mathcal{K}_k , associée à la matrice \mathcal{J}_n et au vecteur initial v_1 . Les termes $h_{i,j}$, générés par cette étape, constituent les éléments de la matrice de Hessenberg \bar{H}_k de dimension $(k+1) \times k$.

La minimisation de la norme $\|\epsilon - \bar{H}_k y\|_2$ revient à résoudre un système triangulaire supérieur d'ordre $(k+1)$. Ceci se fait en utilisant l'algorithme Q-R [108, 111]. Dans ce cas, la matrice \bar{H}_k est factorisée en $Q_k R_k$, où Q_k est une matrice unitaire d'ordre $(k+1)$ et R_k est une matrice triangulaire supérieure d'ordre $(k+1) \times k$ et dont la dernière ligne est nulle.

La dimension de l'espace de Krylov est majorée par la taille N de la matrice \mathcal{J} . La méthode *GMRES* doit alors converger au bout de N itérations au maximum.

Si $k = N$, la solution approchée, en négligeant les erreurs d'arrondi, est alors une solution exacte. Ainsi, la méthode *GMRES* est essentiellement une méthode directe. Cependant, prendre $k = N$ rend l'algorithme très coûteux. En pratique, on peut toujours se contenter d'une solution approchée qu'on peut obtenir, au bout d'un nombre d'itérations inférieur à N , en procédant comme suit:

- On fixe $k = k_{max} \ll N$.
- On construit l'espace de Krylov $\mathcal{K}_{k_{max}}$ de dimension k_{max} .
- On construit la solution approchée $\delta_{k_{max}}$.
- On relance l'algorithme en prenant $\delta_{k_{max}}$ comme solution initiale.

Cette procédure constitue une manière de résolution itérative à l'aide de la méthode *GMRES*. Pour rendre cette méthode plus efficace, un critère de réglage automatique, de la valeur de k , dans l'intervalle $[1, k_{k_{max}}]$, est inclus. Ce critère permet d'amorcer l'algorithme avec une valeur $k = k_{k_{max}}$ qui diminue progressivement avec l'évolution de la solution. Le choix de la valeur $k_{k_{max}}$ dépend intimement de la mémoire machine disponible et particulièrement du problème physique considéré. En effet, une valeur

très petite de k_{max} peut engendrer une convergence très lente ou, peut même causer la divergence du processus [108].

4.7.3. Préconditionnement

Pour que la méthode *GMRES* soit stable et efficace (convergence rapide), le système à résoudre doit alors être preconditionné. Il existe plusieurs types de preconditionneurs modernes [111, 114, 115, 116, etc ...]. Dans notre cas, on utilise le type classique de preconditionnement diagonal pour la seule raison qu'il est simple et économique. Dans ce cas, le système (4.29) se met sous la forme:

$$\tilde{\mathcal{J}}_n \tilde{\delta}_n = -\tilde{\mathbf{R}}_n \quad (4.38)$$

où

$$\tilde{\mathcal{J}}_n = \mathbf{D}_-^{-1/2} \mathcal{J}_n \mathbf{D}_+^{-1/2}$$

et

$$\tilde{\mathbf{R}}_n = \mathbf{D}_-^{-1/2} \mathbf{R}_n \quad \tilde{\delta}_n = \mathbf{D}_+^{\frac{1}{2}} \delta_n$$

avec

$$\mathbf{D}_+^{\frac{1}{2}} = |\mathbf{D}|^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_-^{\frac{1}{2}} = \text{sign}(\mathbf{D}) |\mathbf{D}|^{\frac{1}{2}}$$

\mathbf{D} étant la diagonal de la matrice \mathcal{J}_n

Sommaire

Le modèle numérique consiste en une méthode d'éléments finis. Nous résolvons les équations de conservation stationnaires en utilisant l'approche instationnaire où la solution évolue dans le temps jusqu'à la convergence correspondant au régime permanent. Nous discrétisons la forme variationnelle, dans le temps, en utilisant le schéma d'Euler implicite et, dans l'espace, en utilisant un élément mixte avec une interpolation quadratique pour les composantes de la vitesse et de la quantité de mouvement et, linéaire pour les autres variables. Nous avons exposé les conditions aux limites, dans le cas des écoulements internes, en explicitant les techniques que nous proposons pour appliquer ces conditions. Nous avons présenté la technique que nous avons implémenté pour le calcul numérique de la viscosité turbulente, sur un maillage non structuré, qui consiste en une variante de la technique de Rostand. Nous résolvons le système algébrique, résultant de la discrétisation spatio-temporelle, à l'aide de l'algorithme *GMRES* avec preconditionnement diagonal.

CHAPITRE 5

MÉTHODES DE STABILISATION

5.1. Introduction

L'approximation, par la méthode des éléments finis classique, des problèmes de convection dominante ou de convection pure, correspond à des approximations de type différences finies centrées conduisant à des solutions instables. De la diffusion est alors nécessaire pour stabiliser la solution. Cette diffusion peut être obtenue soit en ajoutant une viscosité artificielle à la viscosité du fluide sans pour autant changer de schéma ou de méthode de résolution, soit en adoptant un autre schéma ou méthode de résolution permettant d'engendrer cette diffusion.

Dans ce chapitre, on discutera, à travers l'équation de convection-diffusion unidimensionnelle stationnaire, des difficultés que présente la résolution des problèmes de convection-diffusion, des techniques de stabilisation populaires telles que les schémas décentrés, la diffusion artificielle, la méthode de Petrov-Galerkin et la méthode *SUPG*. Cette dernière méthode sera ensuite généralisée aux problèmes multidimensionnels instationnaires tels que les équations de Navier-Stokes et d'Euler. Enfin, on présentera un modèle de stabilisation, additionnel à la méthode *SUPG*, appelé ici opérateur de capture de chocs, permettant de renforcer la stabilité en contrôlant les oscillations dans des directions autres que les lignes de courant.

5.2. Équation de convection-diffusion

On appelle équation de convection-diffusion, l'équation aux dérivées partielles suivante pour ϕ :

$$\phi_{,t} + \nabla \cdot (u\phi) - \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) = f \quad (5.1)$$

où $u(x, t)$ est la vitesse de l'écoulement, $\kappa(x, t)$ est le coefficient de diffusion positif et f est la source. En général, κ est petit devant UL (vitesse \times longueur caractéristiques) de sorte que la convection soit dominante sur la diffusion et par conséquent, des problèmes d'instabilités des schémas centrés, en régime stationnaire, sont à surmonter.

5.2.1. Instabilité des schémas centrés

Soit le problème simple de convection-diffusion unidimensionnel suivant:
trouver ϕ dans l'intervalle $]0, L[$ satisfaisant l'équation de convection-diffusion:

$$u\phi_{,x} - \kappa\phi_{,xx} = 0 \quad (5.2.1)$$

et les conditions aux limites de Dirichlet:

$$\phi(0) = \phi_0 \quad (5.2.2)$$

$$\phi(L) = \phi_L \quad (5.2.3)$$

où u et κ sont constants et positifs.

La solution exacte du problème (5.2) est donnée par:

$$\phi(x) = c_1 + c_2 \exp \left(Pe \frac{x}{L} \right) \quad (5.3)$$

où $Pe = \frac{uL}{\kappa}$ est le nombre de Peclet global. c_1 et c_2 sont des constantes dépendant des conditions aux limites (5.2.2) et (5.2.3).

Soient maintenant N points équidistants situés entre $x = 0$ et $x = L$ correspondants à N valeurs ϕ_i ($i = 1, \dots, N$). Soit x_i un point situé entre les points x_{i-1} et x_{i+1} . L'approximation par un schéma de différences finies centrées de l'équation de convection-diffusion (5.2.1) s'écrit:

$$\frac{u}{2h} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \frac{\kappa}{h^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) = 0 \quad (5.4)$$

où $h = (x_{i+1} - x_{i-1})/2$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme:

$$a\phi_{i+1} - 2b\phi_i + c\phi_{i-1} = 0 \quad (5.5)$$

où

$$a = 1 - Pe, \quad b = 1, \quad c = 1 + Pe$$

$Pe = \frac{uh}{2\kappa}$ est le nombre de Peclet local.

Le discriminant associé à l'équation (5.5) est:

$$\Delta = b^2 - ac = \left(\frac{a - c}{2} \right)^2$$

et les solutions de l'équation (5.5) sont alors

$$\phi_1 = 1 \quad \text{et} \quad \phi_2 = \frac{1 + Pe}{1 - Pe}$$

La solution générale de l'équation (5.5) donc de l'équation (5.4) sera la combinaison linéaire des solutions ϕ_1 et ϕ_2 telle que:

$$\phi_i = c_3 + c_4 \left(\frac{1 + Pe}{1 - Pe} \right) \quad (5.6)$$

où c_3 et c_4 sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites (5.2.2 et 5.2.3).

En identifiant les solution exacte (5.3) et discrète (5.6), on doit avoir $c_1 = c_3$, $c_2 = c_4$ et

$$\exp \left(Pe \frac{x}{L} \right) = \frac{1 + Pe}{1 - Pe} \quad (5.7)$$

Remarque 5.1 :

En analysant l'équation (5.7) on remarque que, si $Pe > 1$ (convection dominante), le terme de gauche devient négatif et l'équation (5.7) devient mal définie. L'approximation de type différences finies centrées de l'équation (5.2.1) introduit donc une diffusion négative engendrant des oscillations non physiques de la solution discrète (5.6). Un remède à ce problème consiste à introduire de la diffusion numérique positive de manière à vaincre la diffusion numérique négative: c'est le but du décentrage.

5.2.2. Schéma décentré - diffusion artificielle

En adoptant une approximation de différences finies décentrées amont, pour le terme de convection, l'équation de convection-diffusion (5.2.1) s'écrit:

$$\frac{u}{h}(-\phi_{i-1} + \phi_i) - \frac{\kappa}{h^2}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) = 0 \quad (5.8)$$

ou encore:

$$a\phi_{i+1} - 2b\phi_i + c\phi_{i-1} = 0 \quad (5.9)$$

où

$$a = 1, \quad b = 1 + 2Pe, \quad c = 1 + Pe$$

De la même manière que l'approximation centrée, on trouve la solution associée à l'approximation décentrée (5.8) qui est:

$$\phi_i = c_3 + c_4(1 + 2Pe) \quad (5.10)$$

Aussi, en identifiant la solution exacte (5.3) et la solution discrète (5.10), on doit avoir: $c_3 = c_1$, $c_4 = c_2$ et

$$\exp\left(Pe \frac{x}{L}\right) = 1 + 2Pe \quad (5.11)$$

Remarque 5.2 :

En adoptant une approximation décentrée, on aboutit à l'équation (5.11) qui est bien définie quelque soit le nombre de Peclet positif. Ainsi, l'approximation de type décentrée, du terme convectif, engendre une diffusion numérique positive permettant une solution non oscillante.

Remarque 5.3 :

On doit souligné qu'une approximation centrée, dans le cas ou κ est remplacé par $\kappa + \tilde{\kappa}$, conduit au même résultat qu'un schéma décentré si $\tilde{\kappa} = \frac{uh}{2}$. Ainsi, une approximation décentrée introduit de la diffusion artificielle.

Remarque 5.4 :

Notons que, dans le cas d'un schéma centré, la diffusion numérique $\tilde{\kappa}$ peut ne pas être optimale pour permettre une solution exacte aux noeuds.

Pour mettre en évidence la diffusion numérique optimale, procédons comme suit:

En remplaçant κ par $\bar{\kappa} = \kappa + \tilde{\kappa}$ ($\tilde{\kappa}$ étant le coefficient de diffusion artificielle), l'approximation, par différences centrées, de l'équation (5.2.1) s'écrit:

$$\frac{u}{2h} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \frac{\bar{\kappa}}{h^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) = 0 \quad (5.12)$$

ou encore:

$$a\phi_{i+1} - 2b\phi_i + c\phi_{i-1} = 0 \quad (5.13)$$

où

$$a = 1 - \overline{Pe}, \quad b = 1, \quad c = 1 + \overline{Pe}$$

avec $\overline{Pe} = \frac{uh}{2\bar{\kappa}}$.

De la même manière que précédemment, la solution de l'équation (5.13) donc de l'équation (5.12) est:

$$\phi_i = c_3 + c_4 \left(\frac{1 + \overline{Pe}}{1 - \overline{Pe}} \right) \quad (5.14)$$

où c_3 et c_4 sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites (5.2.2) et (5.2.3).

Si la diffusion $\tilde{\kappa}$ est optimale alors la solution (5.14) doit être exactement égale à la solution exacte (5.3). Ainsi, en identifiant les solutions exacte (5.3) et discrète (5.14) terme à terme, on écrit:

$$c_3 = c_1 \quad (5.15)$$

$$c_4 = c_2 \quad (5.16)$$

$$\frac{1 + \overline{Pe}}{1 - \overline{Pe}} = \exp \left(Pe \frac{x}{L} \right) \quad (5.17)$$

En prenant $x = \frac{h}{2}$ (la taille d'un élément) et en substituant l'expression du nombre de Peclet global ($Pe = \frac{uL}{\kappa}$) dans (5.17), on obtient:

$$\frac{1 + \overline{Pe}}{1 - \overline{Pe}} = \exp \left(\frac{uh}{2\bar{\kappa}} \right) \quad (5.18)$$

d'où,

$$\overline{Pe} = \frac{uh}{2\bar{\kappa}} = \tanh \left(\frac{uh}{2\kappa} \right) \quad (5.19)$$

Par conséquent, en substituant $\bar{\kappa}$ par $(\kappa + \tilde{\kappa})$ dans l'expression (5.19), on obtient:

$$\tilde{\kappa} = \frac{uh}{2} \left[\coth \left(\frac{uh}{2\kappa} \right) - \frac{2\kappa}{uh} \right] \quad (5.20)$$

Ainsi, un schéma centré optimale donnant une solution exacte aux noeuds serait celui pour lequel le coefficient de diffusion artificielle est choisi tel que:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\kappa} &= \frac{uh}{2} \tilde{\xi}(Pe) \\ \tilde{\xi}(Pe) &= \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \\ Pe &= \frac{uh}{2\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

5.2.3. Méthodes de Galerkin et Petrov-Galerkin

La formulation variationnelle faible de type Galerkin, du problème de convection-diffusion (5.2.1 à 5.2.3), consiste à trouver ϕ tel que, pour toute fonction de pondération ω , on a:

$$\int_0^L (\omega u \phi_{,x} + \omega_{,x} \kappa \phi_{,x}) dx = 0 \quad (5.22)$$

Chaque solution ϕ doit satisfaire les conditions de Dirichlet (5.2.2) et (5.2.3) et chaque fonction de pondération ω doit satisfaire sa condition homogène:

$$\omega(0) = \omega(L) = 0$$

Sur des éléments finis P^1 , la forme variationnelle (5.22) peut être approchée par:

$$\int_0^L (u \phi_{h,x} \omega_h + \kappa \phi_{h,x} \omega_{h,x}) dx = 0 \quad (5.23)$$

En subdivisant l'intervalle $[0, L]$ en des intervalles de longueur égale h , on peut vérifier que l'approximation (5.22) s'écrit:

$$\frac{u}{2h}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \frac{\kappa}{h^2}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) = 0 \quad (5.24)$$

Ainsi, la formulation variationnelle de Galerkin correspond à une approximation de type différences finies centrées, qui peut être instable si le nombre de Peclet est supérieur à 1 (convection dominante). De la diffusion est alors nécessaire pour stabiliser la solution. Cette diffusion peut être engendrée via un décentrage, à l'aide de la méthode de Petrov-Galerkin, en prenant des fonctions de pondération de la forme:

$$\tilde{\omega} = \omega + p$$

où ω est la fonction continue et p est la contribution (ou perturbation) discontinue. Dans ce cas, la formulation variationnelle faible de l'équation de convection-diffusion (5.2.1), selon la méthode de Petrov-Galerkin, s'écrit:

$$\int_0^L (\omega u \phi_{,x} + \omega_{,x} \kappa \phi_{,x}) dx + \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(u \phi_{,x} - \kappa \phi_{,xx}) dx = 0 \quad (5.25)$$

Remarque 5.5 :

Le deuxième terme du membre de gauche de l'équation (5.25) constitue la perturbation qu'il faut ajouter à la formulation de Galerkin dans le but de stabiliser la solution.

5.2.4. Méthode SUPG

La méthode *SUPG* a été proposée par Hughes et ses collaborateurs [6, 7]. C'est une variante de la méthode de Petrov-Galerkin basée sur le concept de la diffusion artificielle optimale développée précédemment (5.21). En se basant sur ce concept, le problème (5.2.1 à 5.2.3) devient:

trouver $\phi \in [0, L] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telque:

$$u \phi_{,x} - (\kappa + \tilde{\kappa}) \phi_{,xx} = 0 \quad (5.26.1)$$

$$\phi(0) = \phi_0 \quad (5.26.2)$$

$$\phi(L) = \phi_L \quad (5.26.3)$$

où $\tilde{\kappa}$ est le coefficient de diffusion artificielle optimal. Dans ce cas, la formulation variationnelle faible de l'équation (5.26.1) s'écrit:

$$\int_0^L (\omega u \phi_{,x} + (\kappa + \tilde{\kappa}) \omega_{,x} \phi_{,x}) dx = 0 \quad (5.27)$$

Comme $\tilde{\kappa} = \frac{uh}{2} \tilde{\xi}(Pe)$, l'équation (5.27) devient:

$$\int_0^L \left[\left(\omega + \frac{h}{2} \tilde{\xi}(Pe) \omega_{,x} \right) u \phi_{,x} + \kappa \omega_{,x} \phi_{,x} \right] dx = 0 \quad (5.28)$$

Cette dernière formulation est équivalente à la formulation de Petrov-Galerkin où la fonction de pondération p , qui ne concerne ici que le terme convectif, est définie telle que:

$$p = \frac{h}{2} \tilde{\xi}(Pe) \omega_{,x} = \frac{\tilde{\kappa}}{u^2} u \omega_{,x}$$

Ainsi, la diffusion artificielle, qu'il faut ajouter à la formulation de Galerkin pour stabiliser la solution, peut se faire à l'aide d'un décentrage en utilisant la méthode de Petrov-Galerkin et en prenant la fonction de pondération discontinue p telle que:

$$\left. \begin{aligned} p &= \tau u \omega_{,x} \\ \tau &= \frac{\tilde{\kappa}}{u^2} \\ \tilde{\kappa} &= \frac{uh}{2} \tilde{\xi}(Pe) \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Comme $\tilde{\kappa}$ possède un caractère directionnel (u dans le cas unidimensionnel), on parle alors de la méthode *SUPG* (Streamline Upwinding Petrov-Galerkin)

La formulation faible, selon la méthode *SUPG*, de l'équation de convection-diffusion unidimensionnelle stationnaire (5.2.1) s'écrit alors:

$$\int_0^L (\omega u \phi_{,x} + \omega_{,x} \kappa \phi_{,x}) dx + \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u \omega_{,x}) \tau (u \phi_{,x} - \kappa \phi_{,xx}) dx = 0 \quad (5.30)$$

avec,

$$\tau = \frac{h}{2u} \tilde{\xi}(Pe) \quad (5.31)$$

Remarque 5.6 :

Le deuxième terme du membre de gauche de l'équation (5.30) représente l'opérateur *SUPG* qui constitue la perturbation qu'il faut ajouter à la méthode de Galerkin pour stabiliser la solution.

La méthode *SUPG* (5.30) à été généralisée au cas unidimensionnel instationnaire avec un terme source, où l'équation de convection-diffusion est donnée par:

$$\phi_{,t} + u\phi_{,x} - \kappa\phi_{,xx} = f \quad (5.32)$$

f étant le terme source.

Dans ce cas, la formulation faible, selon la méthode *SUPG*, s'écrit:

$$\int_0^L [\omega(\phi_{,t} + u\phi_{,x}) + \kappa\omega_{,x}\phi_{,x}] dx + \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u\omega_{,x}) \tau(\phi_{,t}u\phi_{,x} - \kappa\phi_{,xx} - f) dx = \int_0^L \omega f dx \quad (5.33)$$

où τ est donné par l'équation (5.31).

Dans le cas multidimensionnel, le caractère directionnel de la diffusion artificielle peut être assuré en remplaçant le coefficient scalaire $\tilde{\kappa}$, utilisé dans le cas unidimensionnel, par le tenseur [9]:

$$\tilde{\kappa}_{ij} = \tilde{\kappa} \frac{u_i u_j}{u_k u_k} \quad (5.34)$$

où la somme est faite sur l'indice répété. Cette définition traduit clairement le caractère directionnel qui peut être facilement vérifié en prenant $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

Il vient,

$$p = \tau \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \quad (5.35)$$

$$\tau_{ij} = \frac{\tilde{\kappa}_{ij}}{|\mathbf{u}|^2} \quad (5.36)$$

Ainsi, dans le cas multidimensionnel d'un champ scalaire ϕ (équation 5.1), la méthode *SUPG* s'écrit:

$$\int_0^L [\omega(\phi_{,t} + \nabla \cdot (u\phi)) + \nabla \omega \cdot (\kappa \nabla \phi)] dx + \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u \cdot \nabla \omega) \tau [\phi_{,t} + \nabla \cdot (u\phi) - \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) - f] dx = \int_0^L \omega f dx \quad (5.37)$$

Remarque 5.7 :

Dans le cas multidimensionnel d'un champ scalaire, un choix typique de $\tilde{\kappa}$ serait $\tilde{\kappa} = \frac{h}{2} |\mathbf{u}| \tilde{\xi}(Pe)$ [9], il vient:

$$\tau = \frac{h}{2|\mathbf{u}|} \quad (5.38)$$

Ceci assure bien le choix optimal (5.31) si le problème est unidimensionnel.

Remarque 5.8 :

La généralisation de la méthode *SUPG*, au cas d'un système multidimensionnel instationnaire, fera l'objet du paragraphe suivant qui traitera des équations de Navier-Stokes et d'Euler.

5.3. Équations de Navier-Stokes et d'Euler

Selon la méthode *SUPG*, les formulations variationnelles faibles de type Galerkin, sous formes vectorielle (4.5) et quasilinéaire (4.6) sont remplacées respectivement par les formulations variationnelles faibles sous formes vectorielle et quasilinéaire suivantes:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{W} \cdot \left[\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) - \tilde{\mathcal{F}} \right] + \mathbf{W}_{,i} \cdot \left[\tilde{\mathbf{F}}_i^{diff}(\mathbf{Y}) \right] \right\} d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} \left\{ \left(\tilde{\mathbf{A}}_i^t \cdot \mathbf{W}_{,i} \right) \tilde{\tau} \left[\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) - \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{diff}(\mathbf{Y}) - \tilde{\mathcal{F}} \right] \right\} d\Omega^e \\ & = \oint_{\Gamma} \left\{ \mathbf{W} \cdot \left[\tilde{\mathbf{F}}_i^{diff}(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{n}_i \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{W} \cdot \left[\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} - \tilde{\mathcal{F}} \right] + \mathbf{W}_{,i} \cdot \left[\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j} \right] \right\} d\Omega \\
& + \sum_e \int_{\Omega_e} \left\{ \left(\tilde{\mathbf{A}}_i^t \cdot \mathbf{W}_{,i} \right) \tilde{\tau}_{\underline{\underline{\tau}}} \left[\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} - \left(\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j} \right) \mathbf{Y}_{,j} - \tilde{\mathcal{F}} \right] \right\} d\Omega_e \\
& = \oint_{\Gamma} \left\{ \mathbf{W} \cdot \left[\left(\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j} \right) \cdot \mathbf{n}_i \right] \right\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.40}$$

où

$$\tilde{\tau}_{\underline{\underline{\tau}}} = A_0^{-1} \tau_{\underline{\underline{\tau}}} \tag{5.41}$$

Remarque 5.9 :

Rappelons que dans le cas des variables conservatives, $\mathbf{Y} = \mathbf{V} = (\rho, \mathbf{U}, E)^t$ et la matrice \mathbf{A}_0 devient l'identité. Par conséquent, la matrice $\tilde{\tau}_{\underline{\underline{\tau}}}$ se réduit à la matrice $\tau_{\underline{\underline{\tau}}}$ correspondant aux variables conservatives \mathbf{V} .

La formulation variationnelle ci-dessus se distingue par deux propriétés importantes:

- c'est une méthode de résidus pondérés au sens qu'une solution exacte régulière du problème physique original reste encore une solution du problème variationnel. Ceci assure, non seulement une bonne précision de l'approximation mais, aussi une stabilité spatio-temporelle. [10].
- la stabilité est assurée grâce au terme elliptique:

$$\sum \int_{\Omega_e} \left[\left(\tilde{\mathbf{A}}_i^t \cdot \mathbf{W}_i \right) \tilde{\tau}_{\underline{\underline{\tau}}} \tilde{\mathbf{F}}_i^{conv}(\mathbf{Y}) \right] d\Omega_e \tag{5.42}$$

en écriture vectorielle ou:

$$\sum \int_{\Omega_e} \left[\left(\tilde{\mathbf{A}}_i^t \cdot \mathbf{W}_i \right) \tilde{\tau}_{\underline{\underline{\tau}}} \left(\tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_i \right) \right] d\Omega_e \tag{5.43}$$

en écriture quasi-linéaire. Ainsi, cette stabilité dépend énormément de la structure de la matrice $\tau_{\underline{\underline{\tau}}}$. Le choix de cette matrice est alors fondamental pour le bon comportement de la méthode *SUPG*. Ce choix peut être établi selon les critères suivants:

- $\tau_{\underline{\underline{\tau}}}$ est une matrice pleine de même dimension que les matrices \mathbf{A}_i .
- Les éléments de $\tau_{\underline{\underline{\tau}}}$ ont la dimension du temps.

- τ_{\simeq} est une quantité locale dépendant de la géométrie de l'élément.
- τ_{\simeq} doit se réduire à un scalaire donné par (5.31) dans le cas d'une équation scalaire unidimensionnelle et à l'expression (5.38) dans le cas d'une équation scalaire multidimensionnelle.

Soulaïmani et Fortin [10] ont proposé et validé numériquement la définition de la matrice τ_{\simeq} [24, 55] telle que:

$$\tau_{\simeq} = \left[\sum |c_{ij} \mathbf{A}_j| \right]^{-1} \tilde{\xi}(Pe) \quad (5.44)$$

où,

$$c_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$$

sont les coefficients de l'inverse de la matrice jacobienne de transformation géométrique.

Remarque 5.10 :

Dans le cas d'un système d'équations unidimensionnelles, on a:

$$c_{ij} = c = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{h}$$

où h est la taille de l'élément, et la matrice τ_{\simeq} donnée par (5.44) se réduit à:

$$\tau_{\simeq} = \frac{h}{2} |\mathbf{A}|^{-1} \tilde{\xi}(Pe) \quad (5.45)$$

Remarque 5.11 :

La matrice τ_{\simeq} telle que définie par (5.44) vérifie bien les critères énumérés précédemment. En particulier, cette matrice se réduit bien à l'expression (5.45) dans le cas d'un système d'équations unidimensionnelles, à l'expression (5.38) dans le cas d'une équation multidimensionnelle d'un champ scalaire et finalement au scalaire (5.31) dans le cas d'une équation unidimensionnelle.

Le calcul de la matrice τ_{\simeq} telle que définie par (5.44) requiert la résolution d'un problème aux valeurs propres. Une manière simple pour déterminer les matrices des

vecteurs propres et des valeurs propres, associées aux matrices $c_{ij} \mathbf{A}_j$ est présentée à l'annexe A.

5.4. Opérateur de capture de chocs

La méthode *SUPG* telle que conçue consiste en un décentrage (une dissipation supplémentaire) selon la direction des lignes de courant. Cette méthode se trouve donc très efficace pour des solutions suffisamment régulières, en contrôlant les oscillations non physiques le long des lignes de courant. Cependant, cette direction n'est pas toujours la direction la plus appropriée pour permettre la dissipation désirée. En effet, cette situation peut se manifester en présence de chocs où certaines oscillations persistent au voisinage des discontinuités à cause de l'absence de contrôle des gradients dans des directions autres que les lignes de courant. Ainsi, il devient nécessaire de renforcer la méthode *SUPG* en lui ajoutant un autre terme, appelé capteur de chocs, permettant de favoriser d'avantage la dissipation et par conséquent d'amortir les oscillations au voisinage des discontinuités.

Selon Mallet [9] et ensuite Shakib [12], l'opérateur de capture de chocs doit satisfaire les critères suivants:

- il doit agir selon la direction des gradients.
- il doit être proportionnel au résidu local de résolution.
- il doit tendre rapidement vers zéro dans les zones régulières (solutions lisses).

Contrairement à Mallet [9], Galeao et Dutra do Carmo [13] stipulent que n'importe quelle direction peut être la direction appropriée pour le décentrage. Ainsi, en se basant sur l'argument; que pour les problèmes de convection pure, les lignes de courant sont exactement les directions physiques de transport dans le cas d'une solution exacte et que ces directions sont approximatives dans le cas d'une solution numérique (donc approximative), Galeao et Dutra do Carmo introduisent le concept de direction approximative de décentrage qui doit tendre vers la direction de la ligne de courant quand la solution approchée tend vers la solution exacte. Ils proposent ainsi, un opérateur de capture de chocs proportionnel aussi au résidu local.

Tout les opérateurs de capture de chocs, développés par les auteurs ci-haut, pour un système de convection-diffusion symétrique, peuvent se mettre sous la forme:

$$\sum \int_{\Omega_e} \mu_{cc} \nabla_{\xi} \mathbf{W} \cdot \nabla_{\xi} \mathbf{Y} d\Omega$$

où ∇_{ξ} est l'opérateur gradient selon le système de coordonnées local ξ lié à l'élément. μ_{cc} est le coefficient de capture de chocs dépendant du résidu local:

$$\mu_{cc} = f(\mathbf{R})$$

où

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} - \left(\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j} \right)_{,i} - \tilde{\mathcal{F}}$$

En résumé de ce qui a précédé, on peut dire que l'objectif est de favoriser la dissipation de manière à réduire le résidu local de résolution au voisinage des discontinuités dans le but d'obtenir une solution régulière. Partant de ce principe physique, Soulaïmani et Fortin [10] eurent l'idée de construire un opérateur de capture de chocs, pour les systèmes de convection-diffusion non symétriques, utilisé ici, qui consiste en une viscosité artificielle à ajouter à la viscosité réelle du fluide. En appliquant les techniques standards de l'estimation d'erreur, à la méthode *SUPG*, les auteurs expriment cette viscosité artificielle comme suit:

$$\mu_{cc} = \min \left(C_k \frac{h}{2} \|\tilde{\tau} \mathbf{R}\|_{\tilde{\xi}(Pe)}, \frac{h}{2} \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\xi}(Pe)} \right) \quad (5.46)$$

où C_k est le coefficient de capture de chocs qui peut être ajusté selon que le choc est faible ou très fort, h est la taille de l'élément, $\|\cdot\|$ est la norme $L_2(\Omega)$ et \mathbf{R} est le résidu local. Cette viscosité en fonction du résidu local et de la taille de l'élément permet une dissipation supplémentaire de la quantité de mouvement et de l'énergie sans aucune modification de l'équation de continuité, alors que les opérateurs de capture de chocs précédents agissent aussi sur l'équation de continuité. Elle se trouve donc très élevée dans les zones à fortes oscillations ou de chocs et pratiquement nulle quand la solution est lisse. De plus, cet opérateur de capture de chocs est plus simple à mettre en oeuvre numérique et semble moins diffusif [11] comparativement à celui développé par Mallet [9].

Sommaire

Dans le cas des problèmes de convection dominante ou de convection pure, la formulation de Galerkin peut être instable et peut engendrer des solutions présentant des oscillations non physiques. Pour remédier à ce problème, nous utilisons alors une variante de la méthode *SUPG* (Streamline Upwinding Petrov Galerkin). En présence de forts gradients, nous renforçons la stabilité en ajoutant, à la viscosité du fluide, une viscosité artificielle dite de capture de chocs.

CHAPITRE 6

VALIDATIONS ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES

6.1. Introduction

Ce chapitre sera consacré à la validation numérique de la formulation conservative en variables enthalpiques, des techniques de stabilisation (*SUPG* et l'opérateur de capture de chocs) et du modèle de turbulence proposé. Dans ce but, plusieurs types d'écoulements compressibles bidimensionnels ont été étudiés. La robustesse du code a été validée à l'aide de l'étude de l'écoulement, laminaire et turbulent, dans les éjecteurs dont la géométrie et la physique de l'écoulement sont très complexes. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats des travaux antérieurs et sont présentés à la fin de ce chapitre.

6.2. Écoulements dans les tuyères

Les tuyères sont des conduites de géométries variables très utilisées dans les applications énergétiques pour transformer l'énergie de pression en énergie cinétique. Les validations ont été menées sur trois types de tuyères pour simuler les écoulements visqueux et non visqueux avec et sans chocs. Les différents cas se présentent comme suit:

6.2.1. Écoulement non visqueux

Deux types d'écoulements non visqueux ont été étudiés: l'écoulement subsonique-supersonique et l'écoulement supersonique avec choc.

6.2.1.1. Écoulement subsonique-supersonique

L'étude de cet écoulement a été menée sur la tuyère bidimensionnelle convergente-divergente de type GPL. La géométrie de cette tuyère est présentée à la figure C1 (annexe C). Le maillage utilisé consiste en 1545 éléments pour un nombre total de 3220 noeuds (Fig. 6.1). Les conditions aux limites imposées sont:

- à l'entrée, l'écoulement est subsonique. La pression totale $P_0 = 1$, la température totale $T_0 = 1$ et la vitesse transversale $u_2 = 0$ sont imposées.
- sur la paroi solide, le glissement est imposé: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ou $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$.
- sur l'axe de symétrie on impose $u_2 = 0$.
- la sortie de l'écoulement étant supersonique, aucune condition de Dirichlet n'est alors imposée.

Les figures 6.2 à 6.6 représentent respectivement les isobares, les isomachs, les isodensités, le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie et le nombre de Mach sur la paroi solide.

Le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie de la tuyère (Fig. 6.5) montre une très bonne comparaison avec le résultat donné à la référence [118]. Cependant, sur la paroi, le nombre de Mach se trouve inférieur vers la sortie comparativement à celui de la référence [118]. Ceci est dû probablement à la viscosité artificielle injectée pour stabiliser la solution. Une adaptation du maillage réduira considérablement cette viscosité et par conséquent améliorera nettement la solution.

6.2.1.2. Écoulement supersonique avec choc

Ce type d'écoulement a été mené sur la tuyère traitée par van Leer [119]. La géométrie de cette tuyère est définie telle que:

$$y(x) = 1.75 - 0.75[\cos(x - 5)\pi/5] \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 5$$

$$y(x) = 1.25 - 0.25[\cos(x - 5)\pi/5] \quad \text{pour } 5 \leq x \leq 10$$

Les conditions aux limites imposées sont:

- à l'entrée, on impose $P_0 = 1$, $T_0 = 1$ et $u_2 = 0$.
- sur la paroi solide, on impose le glissement: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ou $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$.
- sur l'axe de symétrie, on impose $u_2 = 0$.
- à la sortie, on impose une pression statique P_a correspondant à un rapport $P_a/P_0 = 0.84$ [119].

Les calculs ont été effectués sur un maillage initial de 2000 éléments pour un nombre de noeuds de 4191 (Fig. 6.7). La solution obtenue sur ce maillage a été améliorée par une adaptation du maillage à l'aide de l'adaptateur de maillages développé par Dompière et al [120]. Le maillage adapté final consiste en 826 éléments et 1841

noeuds (Fig. 6.8). Les isobares, les isomachs, les isodensités, le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie, avant et après l'adaptation du maillage, sont données aux figures (6.9.1 et 6.9.2), (6.10.1 et 6.10.2), (6.11.1 et 6.11.2) et (6.12) respectivement. En analysant les résultats, on constate une très bonne résolution particulièrement de la position et l'épaisseur de la discontinuité (onde de choc droite). L'adaptation du maillage a permis une réduction du coefficient de viscosité artificielle de capture de choc de $C_k = 50$ à $C_k = 0.01$ qui donne une viscosité artificielle très faible (de l'ordre de 10^{-3}). Le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie obtenu sur le maillage adapté est pratiquement confondu avec la solution exacte (Fig. 6.12). Ceci confirme la robustesse de la méthode *SUPG* si le maillage est bien adapté et aussi de l'opérateur de capture de choc utilisé ici pour renforcer la stabilité due à l'opérateur *SUPG* (voir Chapitre 5).

6.2.2. Écoulement visqueux

L'écoulement laminaire visqueux a été étudié dans la tuyère à deux cols, appelée ici double tuyère, traitée par plusieurs auteurs dans le cadre de leur participation à l'atelier GAMM "GAMM WORKSHOP" [121]. La géométrie de cette tuyère est présentée à la figure C2 (annexe C). Cette modélisation constitue un test de validation très efficace, d'une part à cause de la géométrie très complexe de la frontière de cette tuyère et d'autre part à cause des phénomènes physiques complexes engendrés par cet écoulement tels que; la formation des ondes de chocs, les interactions ondes de choc-couche limite et aussi les recirculations.

Tel que présenté au GAMM [121], cet écoulement a été étudié pour trois nombres de Reynolds, 100, 400 et 1600, sur un maillage de 4049 éléments et 8438 noeuds (Fig. 6.13). Les conditions aux limites adoptées sont:

- à l'entrée, on impose: $P_0 = 1$, $T_0 = 1$ et $u_2 = 0$
- la paroi solide est considérée visqueuse et isotherme d'où les conditions aux limites: $u_1 = u_2 = 0$ et $T = T_0$
- sur l'axe de symétrie on impose $u_2 = 0$
- la sortie étant supersonique, aucune condition de Dirichlet n'est alors imposée. Cependant, une condition de Neuman implicite $(\underline{\sigma} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} = 0$ est imposée.

Les isobares, les isomachs et les isodensités sont données respectivement aux figures (6.14.1), (6.15.1) et (6.16.1) pour $Re = 100$, (6.14.2), (6.15.2) et (6.16.2) pour $Re = 400$ et (6.14.3), (6.15.3) et (6.16.3) pour $Re = 1600$. Les figures (6.17) et (6.18) montrent la distribution de la viscosité artificielle de capture de chocs pour Reynolds 400 et 1600 respectivement. Les pressions statiques le long de l'axe de symétrie et sur la paroi solide, le nombre de Mach le long de l'axe de symétrie et le coefficient de frottement sur la paroi solide, pour les trois nombres de Reynolds, sont présentés respectivement aux figures (6.19.1,2,3) (6.20.1,2,3), (6.21.1,2,3) et (6.22.1,2,3).

A Reynolds 100, l'écoulement est considéré très visqueux et la couche limite est épaisse. Ainsi, pour ce cas, seulement la méthode *SUPG* est utilisée. Les isomachs (Fig. 6.15.1) montre la formation d'une zone de recirculation située entre les deux cols. Quoique les effets visqueux sont importants, la méthode *SUPG* a permis de capter une zone de choc droit et de recompression assez forte (Fig. 6.19.1, 6.20.1 et 6.21.1). Comparativement aux résultats présentés à l'atelier GAMM par O. Labbé [121], notre formulation semble moins diffusive. Ceci se traduit par une recompression plus forte et un coefficient de frottement inférieur (Fig. 6.19.1, 6.20.1, 6.21.1 et 6.22.1).

A Reynolds 400, une viscosité de capture de choc de coefficient $C_k = 10$ a été utilisée. Ici, le choc devient plus fort (Fig. 6.19.2, 6.20.2 et 6.21.2) et à cause de l'interaction de ce choc avec la couche limite, plus mince dans ce cas, le recollement de l'écoulement se fait plus loin qui fait que la zone de recirculation devient plus large que dans le cas de Reynolds 100 (Fig. 6.15.2). De même, la solution obtenue semble moins diffusive que celle donnée par O. Labbé (Fig. 6.19.2, 6.20.2, 6.21.2 et 6.22.2).

A Reynolds 1600, aussi une viscosité de capture de choc de coefficient $C_k = 10$ a été utilisé. Dans ce cas, la couche limite est beaucoup plus mince. Le choc droit devient oblique et par conséquent la zone de recirculation est très réduite (Fig. 6.15.3) et l'écoulement reste supersonique depuis le premier col jusqu'à la sortie (Fig. 6.21.3). A cause de l'interaction de l'onde de choc oblique avec la couche limite, une deuxième petite zone de recirculation apparaît (Fig. 6.15.3). En comparaison avec les résultats de O. Labbé [121], la solution obtenue est moins diffusive et montre une épaisseur de la couche limite plus mince (Fig. 6.19.3, 6.20.3, 6.21.3 et 6.22.3)

Remarque 6.1.

Les résultats présentés ici ont été obtenus sur un maillage initial non adapté. Cependant, ces résultats reproduisent fidèlement les phénomènes physiques (ondes de choc normale, oblique et interaction onde de choc-couche limite) observés par O. Labbé sur un maillage adapté [121]. Dans le cas de Reynolds 1600, la figure 6.22.3 montre une couche limite trop mince qui fait que de la viscosité artificielle est davantage nécessaire. Cependant, une augmentation de la valeur de cette viscosité joue contre l'évolution naturelle de l'écoulement et a tendance beaucoup plus à faire disparaître les chocs. Ceci montre qu'une adaptation du maillage est nécessaire permettant de toute évidence une meilleure résolution des chocs et d'interactions ondes de chocs-couche limite.

A cause de la grande divergence de la tuyère à la sortie, une zone de recirculation naturelle [123] est captée, chose qui n'est pas observée sur les résultats présentés à l'atelier GAMM [121]. Ceci est dû, sans doute, au type différent des conditions aux limites imposées à la sortie de la tuyère. Cette zone de recirculation est réduite au

fûr et à mesure que le nombre de Reynolds est grand (Fig. 6.15.1, 6.15.2 et 6.15.3). Ceci est très bien illustrée sur les figures du champ de vitesse B1, B2 et B3 (annexe B)

Finalement les figures (6.17) et (6.18) montrent la distribution de la viscosité artificielle de capture de chocs où le maximum de viscosité est bien localisé dans les zones critiques de chocs et d'interaction ondes de chocs-couche limite. D'où la robustesse de l'opérateur de capture de chocs utilisé.

6.3. Écoulement turbulent sur une plaque plane

L'écoulement turbulent sur une plaque plane, pour un nombre de Reynolds de 1.57×10^6 et un nombre de Mach $M_\infty = 0.635$, a été étudié dans le but de valider l'implémentation numérique du modèle algébrique de Baldwin et Lomax et la technique adoptée pour le calcul de la viscosité turbulente sur un maillage non structuré. La plaque est de longueur 1.0. Le domaine de calcul est limité à gauche à $x = -2.5$, à droite à $x = 1.0$, en bas à $y = 0$ et en haut à $y = 0.12$. Les calculs ont été effectués sur un maillage de 2658 éléments et 5468 noeuds (Fig. 6.23). Les conditions aux limites adoptées sont les suivantes:

- à l'entrée, on applique une pression statique $p = 0.7622$, une enthalpie totale $h = 1.4$ et une vitesse longitudinale $u_1 = 0.4571$. La vitesse transversale u_2 est prise égale à zéro.
- à la sortie et sur la frontière supérieure (à l'infini) du domaine, on applique la pression statique $p = 0.7622$.
- sur la plaque, on applique la condition de non glissement: $u_1 = u_2 = 0$.
- sur la frontière inférieure, avant la plaque, on applique la condition de symétrie ($u_2 = 0$).

Les profils de vitesse longitudinale et de la viscosité turbulente, à la position $x/L = 0.6$ ($L = 1$ étant la longueur de la plaque) sur la plaque, sont présentés aux figures 6.24 et 6.25 respectivement. Le profil de vitesse (Fig. 6.24) montre une bonne comparaison avec le résultat de la référence [124]. De plus, la viscosité turbulente (Fig. 6.25) traduit fidèlement le profil connu [61] (Fig. 3.1) à travers une couche limite turbulente sur une plaque plane c'est à dire, elle est nulle sur la plaque, présente un palier à sa valeur maximale et tend vers zéro tout en s'éloignant de la plaque.

6.4. Application aux éjecteurs

La formulation conservative en variables enthalpiques, la méthode *SUPG*, l'opérateur de capture de chocs et le modèle de turbulence proposé dans ce travail, ont été appliqués aux écoulements dans les éjecteurs. Deux types d'éjecteurs

ont été étudiés: le premier "EJECT1" basé sur les données de Fabri et Siestrunck [29] et étudié numériquement par EL Omari [54] et le second "EJECT2" étudié numériquement par Choi et Soh [52].

Remarque 6.2.

Les conditions aux limites qui reviennent pour chaque éjecteur sont:

- A l'entrée du domaine d'intérêt (donc du primaire et du secondaire), l'écoulement est considéré parallèle et subsonique ainsi la pression statique et l'enthalpie totale, correspondant respectivement à la pression totale et à la température totale désirées, seront imposées
- Etant donnée la symétrie du problème, seulement une moitié de l'éjecteur est considérée en imposant la condition de symétrie le long de l'axe de symétrie.
- Les conditions de non glissement et d'adiabaticité seront imposées sur toutes les parois solides
- A la sortie du domaine une pression statique désirée sera imposée.

Les données totales de l'écoulement primaire sont prises comme les données de référence.

Les indices p , s et m réfèrent respectivement aux écoulements du primaire, du secondaire et du mélange. L'indice 0 réfère aux conditions totales ou de stagnation.

6.4.1. Éjecteur "EJECT1"

La géométrie de cet éjecteur est présentée à la figure (6.26). Le rapport de la section de la zone de mélange A_m à la section au col de la tuyère du primaire A_p est de 5.45. La longueur de la zone de mélange L_m est égale à 15.375 fois la hauteur de cette zone. La tuyère primaire est de type GPL (Fig. C1, annexe C). La section de sortie de cette tuyère correspond à un nombre de Mach de 1.78 dans le cas d'une expansion isentropique.

6.4.1.1. Écoulement laminaire

Dans le but de tirer le maximum d'informations quant au comportement de l'écoulement à travers l'éjecteur et l'influence des conditions aux limites, la modélisation de l'écoulement laminaire dans l'éjecteur "EJECT1" a été tentée pour un nombre de Reynolds, basé sur la hauteur de la zone de mélange, de 2000. Le maillage utilisé consiste en 5350 éléments pour un nombre total de 11 173 noeuds (Fig. 6.27). Ce maillage a été obtenu à partir d'une adaptation, à l'aide de l'adaptateur de maillages développé par Soulaïmani et al [122], effectuée sur un maillage initial après un certain nombre de pas de calcul. Cette adaptation, basée sur le concept de la viscosité artificielle de capture de forts gradients, a permis de raffiner le maillage dans les zones critiques. Deux cas d'écoulements ont été étudiés:

Le premier cas, dont les résultats figurent aux références [22] et [23], consiste en un rapport de pressions totales $P_{0s}/P_{0p} = 0.3$, une sortie d'écoulement libre (aucune condition de Dirichlet n'est imposée) et des températures totales du primaire et du secondaire égales: $T_{0p} = T_{0s} = 1$. Ce test nous a permis d'observer la formation de cellules de chocs suite à l'interaction de l'écoulement primaire supersonique et l'écoulement secondaire subsonique tel que observé expérimentalement [125] (Fig. C3, annexe C) et numériquement [52] (Fig. C4, annexe C). Aussi, ce test a permis de mettre en évidence la robustesse et la précision de la méthode *SUPG* et de l'opérateur de capture de chocs utilisé.

Le second cas utilise les mêmes conditions adoptées par EL Omari [54] c'est à dire; $P_{0s}/P_{0p} = 0.13$; $T_{0s} = T_{0p} = 1$ et une pression statique à la sortie P_a correspondant à un rapport de pressions totales $P_{0p}/P_a = 5.88$ sauf que, puisqu'il s'agit d'une modélisation laminaire le nombre de Reynolds est 2000. A l'entrée de la zone de mélange, le jet primaire supersonique s'accélère davantage et se détend jusqu'à ce que sa pression devienne inférieure à celle de son voisinage de manière qu'il subira une recompression. Ce phénomène de détente et de compression se répète plusieurs fois et il en résulte une formation d'une série de cellules de détente et de compression (Fig. 6.28, 6.29, 6.31 et 6.32). Comme il s'agit de l'air et d'un écoulement laminaire, les effets visqueux moléculaires sont faibles de manière à favoriser le mélange des deux écoulements primaire et secondaire. Ceci fait que les cellules formées se propagent jusqu'à la sortie de l'éjecteur et que l'écoulement secondaire joue pratiquement le rôle d'une paroi fluide sur laquelle frotte l'écoulement primaire. En effet, les phénomènes d'échanges d'énergie et de mélange se font plutôt grâce à la viscosité turbulente (Fig. 6.31, 6.32, 6.33). La figure 6.30 montre la distribution de la viscosité artificielle de capture de chocs où le maximum est bien localisé dans les zones de forts gradients qui confirme, une fois encore, l'efficacité de l'opérateur de capture de chocs utilisé ici pour la captation des cellules de détente et de compression. Cependant, tel que fondée, cette viscosité artificielle n'agit pas sur la couche limite et ne peut pas alors faire le travail de la viscosité turbulente.

6.4.1.2. Écoulement turbulent

L'écoulement turbulent dans l'éjecteur "EJECT1" a été étudié pour les mêmes conditions aux limites que pour le deuxième cas laminaire précédent et pour un nombre de Reynolds de 50000 tel qu'utilisé par EL Omari [54]. Dans ce cas le modèle de turbulence proposé dans ce travail pour l'étude des écoulements dans les éjecteurs a été utilisé. Le maillage précédent (Fig. 6.27) a été raffiné encore au niveau de la paroi de la zone de mélange, à l'aide de l'adaptateur de maillages de Soulaïmani et al [122], de manière à pouvoir capter la couche limite turbulente. Le nouveau maillage consiste en 10286 éléments et 21 751 noeuds (Fig. 6.34) engendrant un nombre de 50682 équations à résoudre. En examinant les lignes isomachs (Fig. 6.35), les lignes isobares (Fig. 6.36), la pression (Fig. 6.32) et le nombre de Mach (Fig. 6.38) le long de l'axe de symétrie, on constate effectivement que les échanges d'énergie et le

mélange des écoulements primaire et secondaire sont très favorisés par la viscosité turbulente. Ceci se traduit bien par une tendance de sortie d'écoulement de mélange davantage uniforme (Fig. 6.36). De plus, notre modèle de turbulence montre très bien son aptitude et son efficacité de capter et de résoudre, de manière très claire et très comparable aux visualisations effectuées par Fabri [29] (Fig. 6.37), les ondes de détente et de compression (Fig. 6.35, 6.36 et 6.42). Le rapport des débits secondaire \dot{m}_s et primaire \dot{m}_p est $\dot{m}_s/\dot{m}_p \approx 0.19$, qui est comparable au rapport expérimental donné par Fabri [29]: $\dot{m}_s/\dot{m}_p = 0.222$. Aussi, la viscosité turbulente estimée par EL Omari, qui a utilisé seulement le modèle de Baldwin et Lomax, semble moins adéquate ou que la viscosité artificielle soit trop élevée qui fait que sa solution soit très diffusive et que les cellules de détente et de compression soient pratiquement absentes (Fig. 6.38). La figure (6.39) montre une détente de l'écoulement secondaire sur une petite distance qui fait que ce dernier est accéléré à cause du rétrécissement de la section de passage dû à l'élargissement du jet à la sortie de la tuyère, ensuite l'écoulement secondaire subit une compression continue jusqu'à la sortie de la zone de mélange. Le coefficient de frottement sur la paroi de la zone de mélange (Fig. 6.40) montre une zone de recirculation due à l'interaction de la couche limite et des ondes de détente et de compression tel que observé expérimentalement [51]. Ceci est absent dans le résultat de la référence [54] qui est du, peut être, à la couche limite très épaisse à cause de la viscosité turbulente ou artificielle probablement trop élevée. La figure (6.41) représente le profil de vitesse longitudinale, à l'entrée, au milieu et à la sortie de la zone de mélange, qui montre l'évolution du mélange des deux écoulements très favorisé vers la sortie à cause de la viscosité turbulente. Finalement, la figure (6.43) montre l'évolution de la viscosité turbulente, le long de la zone de mélange, qui diminue au centre de l'éjecteur et augmente proche de la paroi ce qui traduit logiquement l'évolution naturelle du mélange vers la sortie de l'éjecteur. Le champ de vitesse est montré à la figure B4 (annexe B)

6.4.2. Éjecteur "EJECT2"

L'étude de l'écoulement dans cet éjecteur constitue un meilleur cas de validation pratique de notre modèle de turbulence. C'est un éjecteur bidimensionnel testé au centre de recherche NASA Lewis. La géométrie de cet éjecteur est présentée à la figure (6.44). Choi et Soh [52] ont étudié plusieurs rapports de sections A_s/A_p pour un rapport de pressions totales P_{0p}/P_{0s} fixé et vis versa dans le but de mettre en évidence l'influence des deux rapports sur l'écoulement du mélange. Ici, seulement, le cas $A_s/A_p = 1.5$ et $P_{0p}/P_{0s} = 3.5$ est considéré. Selon Choi et Soh, les conditions aux limites adoptées ici sont:

- $P_{0p} = 3.5$ atm et $T_{0p} = 505$ K au primaire.
- $P_{0s} = 1.0$ atm et $T_{0s} = 300$ K au secondaire (donc du fluide ambiant).
- A la sortie loin de l'éjecteur, une pression statique $P_a = 0.9723$ atm, correspondant au nombre de Mach du courant libre $M_\infty = 0.2$, est imposée.

En normalisant les conditions aux limites ci-dessus par les données totales de

l'écoulement primaire, on obtient:

- $P_{0p} = 1$ et $T_{0p} = 1$ au primaire.
- $P_{0s} = 0.2857P_{0p}$ et $T_{0s} = 0.5940T_{0p}$ au secondaire (donc du fluide ambiant).
- A la sortie loin de l'éjecteur, une pression statique $P_a = 0.2778P_{0p}$

Les nombre de Reynolds, de Prandtl et de Prandtl turbulent sont respectivement 1.3×10^7 , 0.72 et 0.9. Le nombre de Reynolds est basé sur la hauteur et la vitesse à la sortie de la tuyère, correspondant à une expansion isentropique.

Les calculs ont été effectués sur un maillage de 23 374 éléments et 48 648 noeuds (Fig. 6.45) engendrant ainsi 115 348 équations à résoudre. Tel que constaté par Choi et Soh [52], à la sortie de la tuyère primaire, le rapport de pressions $p/P_{0p} \approx 0.543$ est supérieur au rapport de pressions critique: $p/P_{0p} = 0.528$ ainsi, l'écoulement à partir de la sortie de la tuyère primaire devient supersonique. Comme observé pour l'éjecteur "EJECT1", la frontière du jet constitue une frontière de pression constante sur laquelle les ondes de détente se réfléchissent en des ondes de compression. Ce mécanisme forme alors une structure de cellules de chocs (Fig. 6.46, 6.48. 6.51 et 6.52). Comparativement aux résultats de Choi et Soh, notre modèle révèle que l'écoulement primaire, à sa sortie de la tuyère, subit une détente assez importante. Ceci se traduit par une onde de détente assez forte qui se réfléchit en une onde de compression aussi assez forte (Fig. 6.46, 6.48. 6.51 et 6.52). De ce fait, la section de passage pour le secondaire se trouve réduite davantage engendrant la formation d'une ligne sonique (une onde de choc normale) (Fig. 6.46 et 6.48), absente sur les résultats de Choi et Soh (Fig. 6.47 et 6.49), et résulte une accélération importante de l'écoulement secondaire produisant une pression beaucoup plus inférieure à l'entrée de la zone de mélange (Fig. 6.53) qui permet un pompage (aspiration) d'un débit du secondaire (ambiance): $\dot{m}_s/A_s = 207.5$ plus important que celui obtenu par Choi et Soh [52]: $\dot{m}_s/A_s = 157.5$. Après ce passage, l'écoulement secondaire subit une compression jusqu'à la sortie de l'éjecteur. La figure (6.54) montre l'évolution du profil de vitesse le long de la zone de mélange qui traduit l'évolution du mélange des deux courants primaire et secondaire le long de cette zone. En comparaison avec les résultats de Choi et Soh notre cas montre un mélange meilleur qui résulte en un profil de vitesse mieux développé à la sortie de la zone de mélange (Fig. 6.55.1,2,3). La figure (6.50) montre les isolignes de viscosité turbulente. Cette viscosité se trouve bien répartie où le maximum se trouve bien localisé dans les zones critiques de turbulence intense c'est à dire dans les cellules de chocs. Aussi, en évoluant le long de la zone de mélange (Fig. 6.56), cette viscosité diminue au centre et augmente proche de la paroi ce qui suit logiquement l'évolution naturelle du mélange le long de cette zone. Le champ de vitesse est montré à la figure B5 (annexe B)

En résumé, par rapport aux résultats de Choi et Soh [52], on peut dire que notre modèle de turbulence a pu capter un détail très important que Choi et Soh ont manqué qui consiste en la formation d'une onde de choc droite sur la paroi de l'éjecteur (Fig. 6.46 et 6.48) due au rétrécissement important de la section de passage de l'écoulement secondaire à cause probablement du rapport de pression

important [46]. De plus, notre modèle montre un mélange meilleur (caractéristique de la turbulence) des deux courants primaire et secondaire résultant en un profil de vitesse mieux développé à la sortie de la zone de mélange (Fig. 6.55.1,2,3). Aussi, une dépression importante est obtenue à l'entrée de la zone de mélange (Fig. 6.53) qui résulte en un pompage (aspiration) plus important du débit du secondaire. Finalement, ce modèle montre la formation d'une zone de recirculation assez large sur la paroi solide suite à l'interaction cellules de chocs-couche limite (Fig. 6.53).

Résultats.

Écoulement compressible non visqueux
dans la tuyère de type GPL.

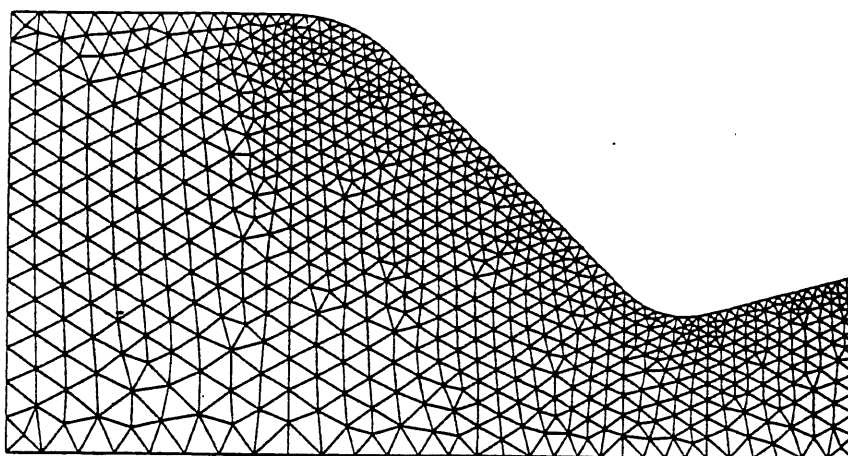


Figure 6.1: Tuyère de type GPL, maillage.

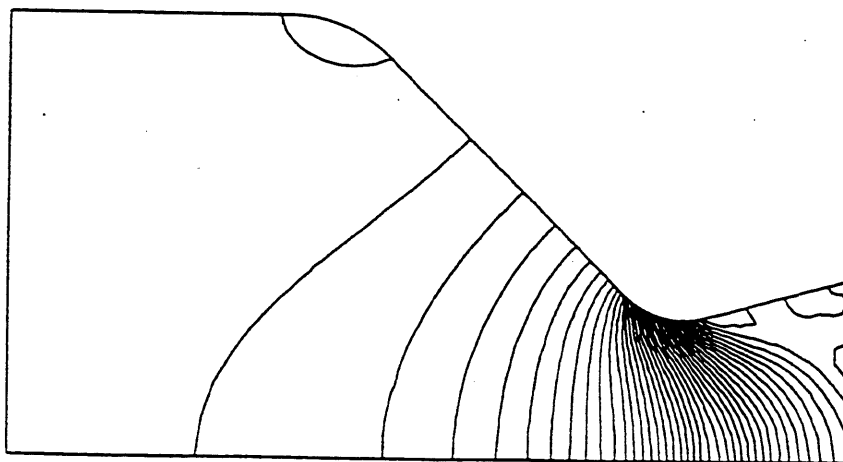


Figure 6.2: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.

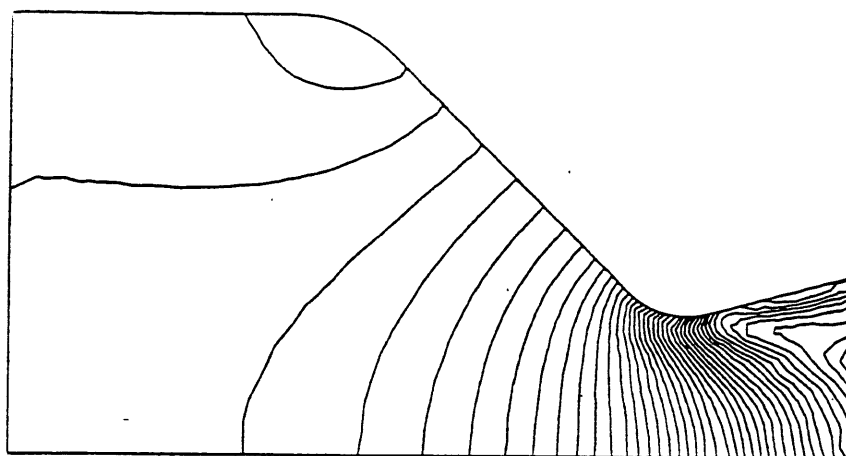


Figure 6.3: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.04$), écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.

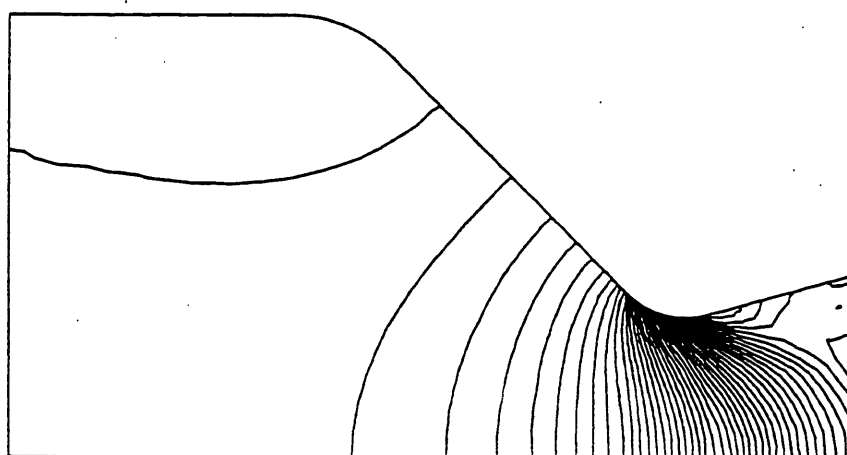


Figure 6.4: Lignes iso-densité ($\Delta \rho = 0.04$), écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.

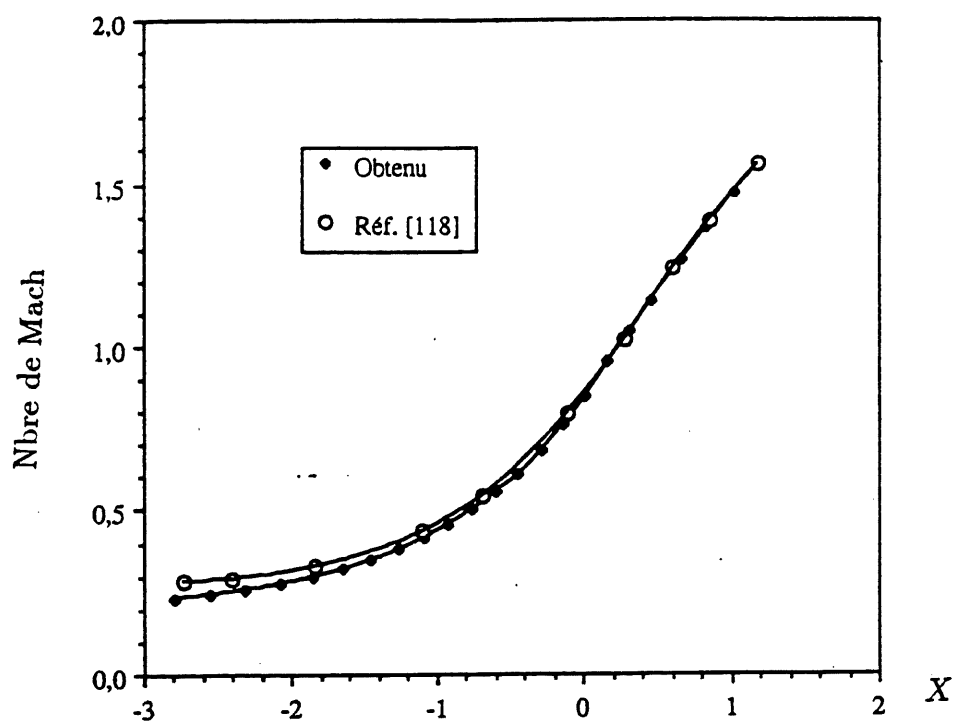


Figure 6.5: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.

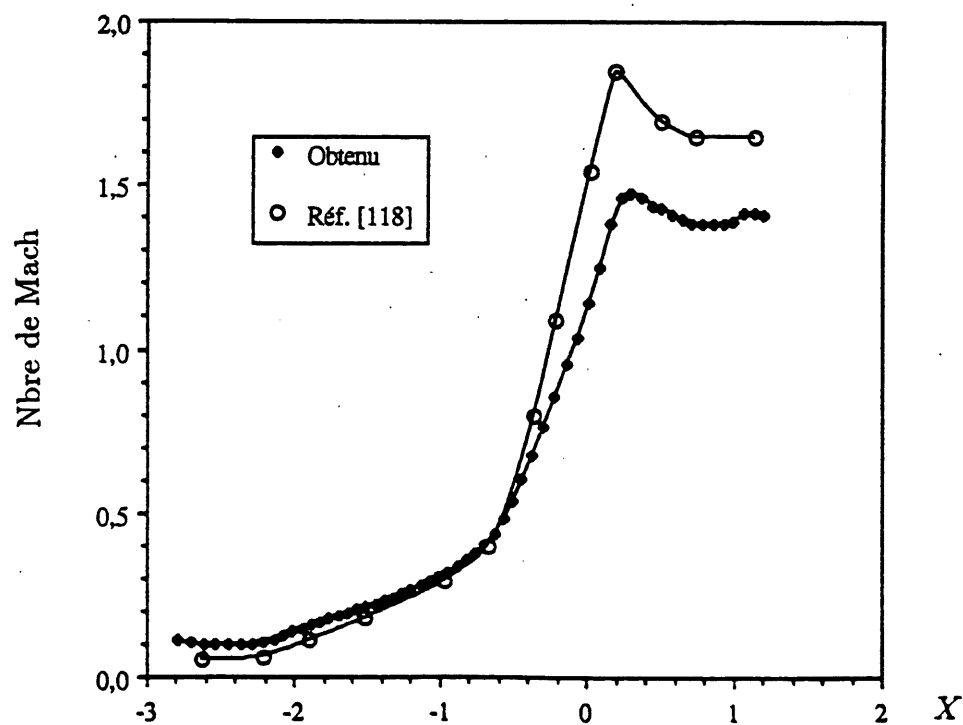


Figure 6.6: Nombre de Mach sur la paroi, écoulement compressible non visqueux dans la tuyère de type GPL.

Écoulement compressible non visqueux avec choc
dans la tuyère traitée par Van LEER.

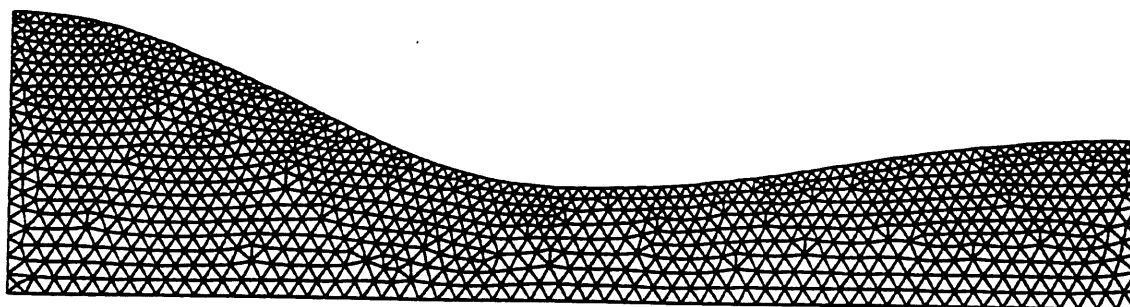


Figure 6.7: Tuyère traitée par van Leer, maillage initial.

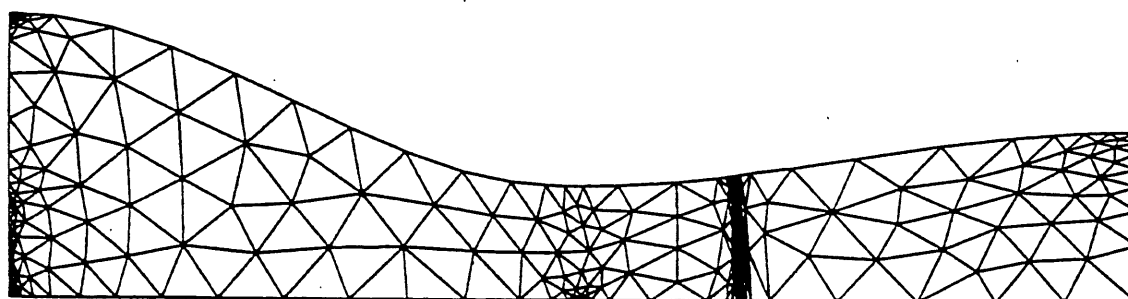


Figure 6.8: Tuyère traitée par van Leer, maillage adapté.

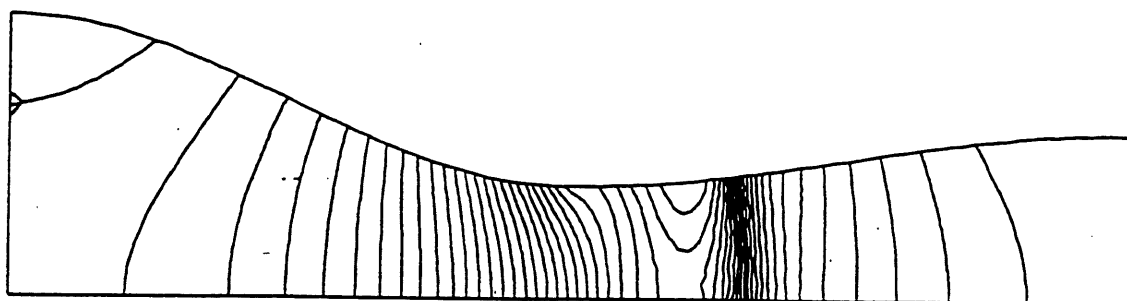


Figure 6.9.1: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$) sur maillage initial, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.

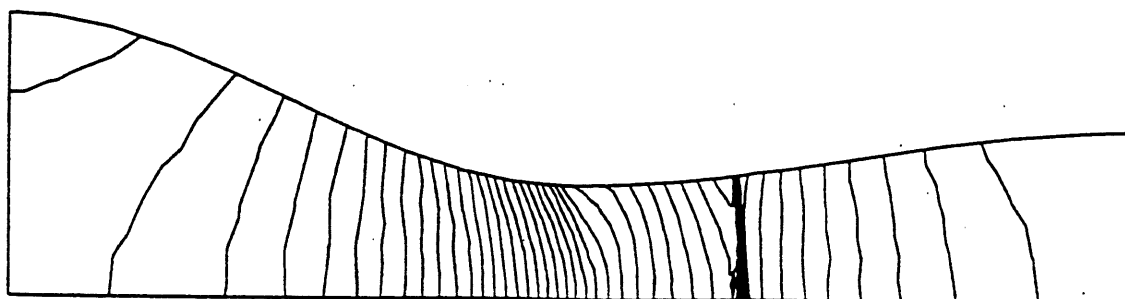


Figure 6.9.2: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$) sur maillage adapté, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.

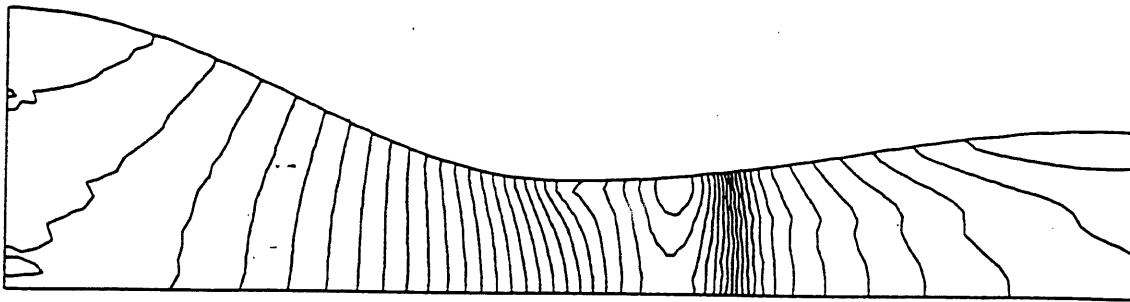


Figure 6.10.1: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.04$) sur maillage initial, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.

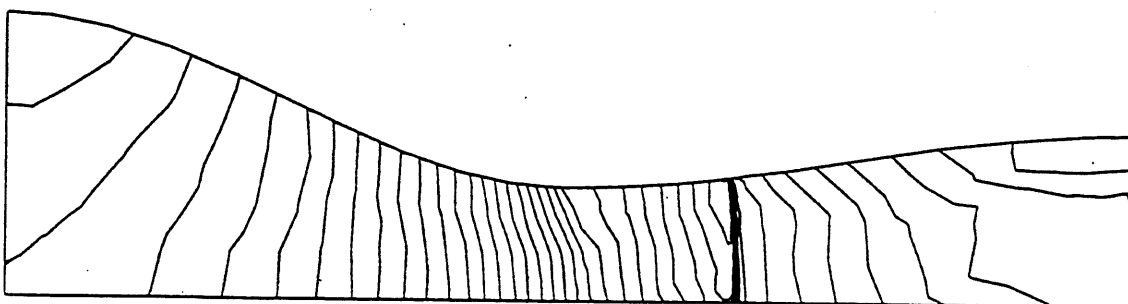


Figure 6.10.2: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.04$) sur maillage adapté, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.

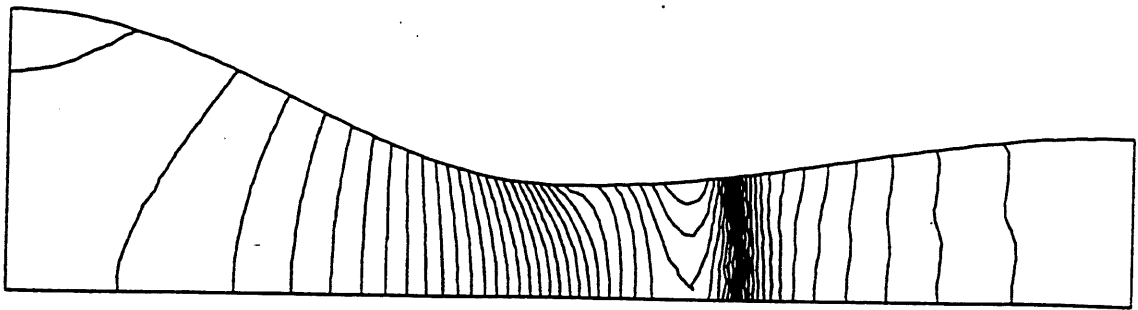


Figure 6.11.1: Lignes iso-densité ($\Delta\rho = 0.04$) sur maillage initial, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.

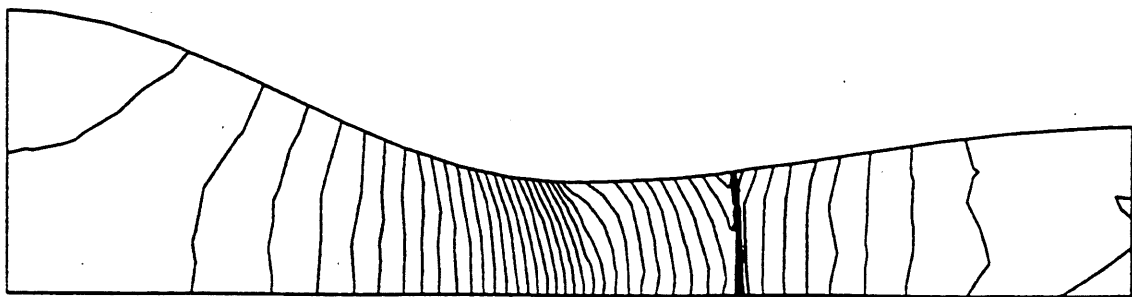


Figure 6.11.2: Lignes iso-densité ($\Delta\rho = 0.04$) sur maillage adapté, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.

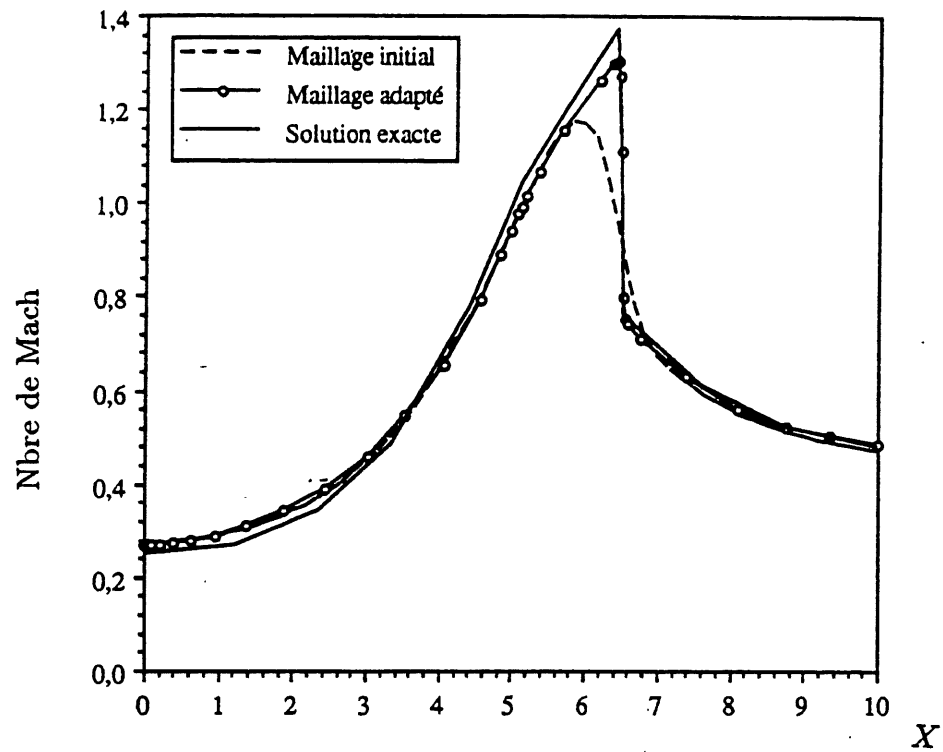


Figure 6.12: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible non visqueux avec choc dans la tuyère traitée par van Leer.

Écoulement compressible visqueux
dans la tuyère à deux cols.

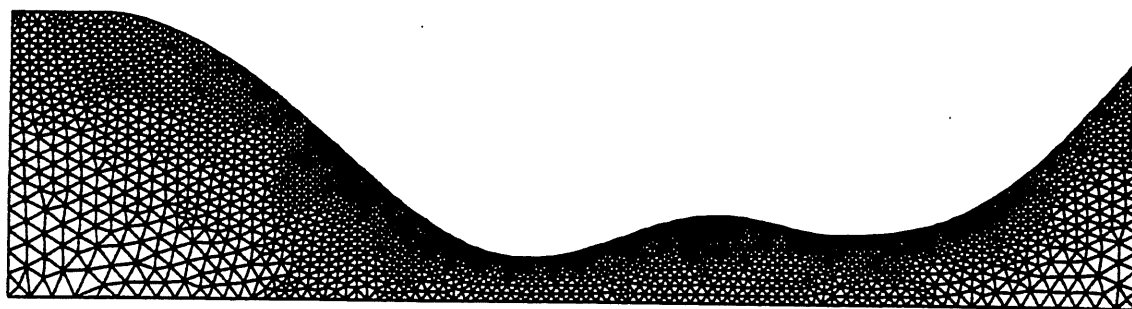


Figure 6.13: Tuyère à deux cols, maillage.

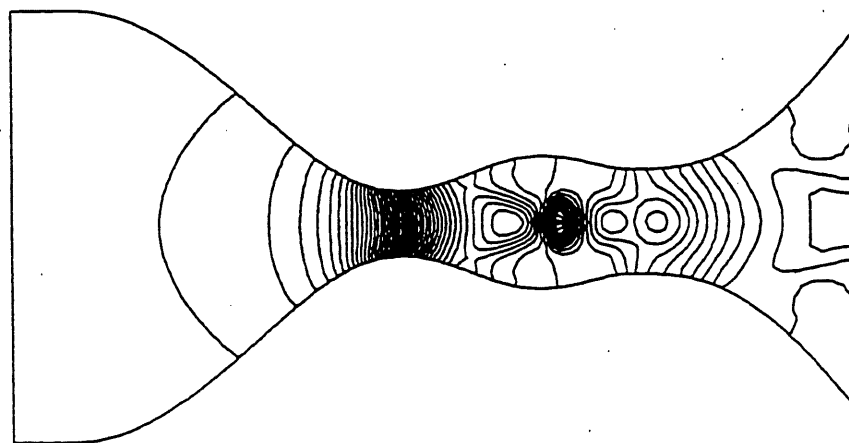


Figure 6.14.1: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$.

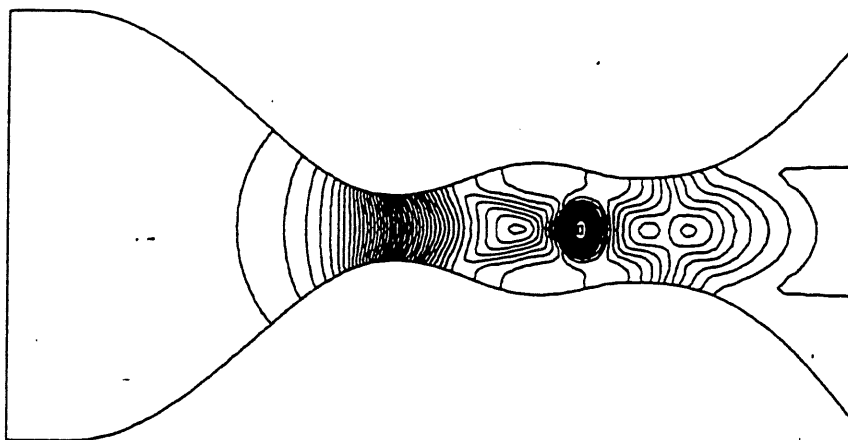


Figure 6.14.2: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.

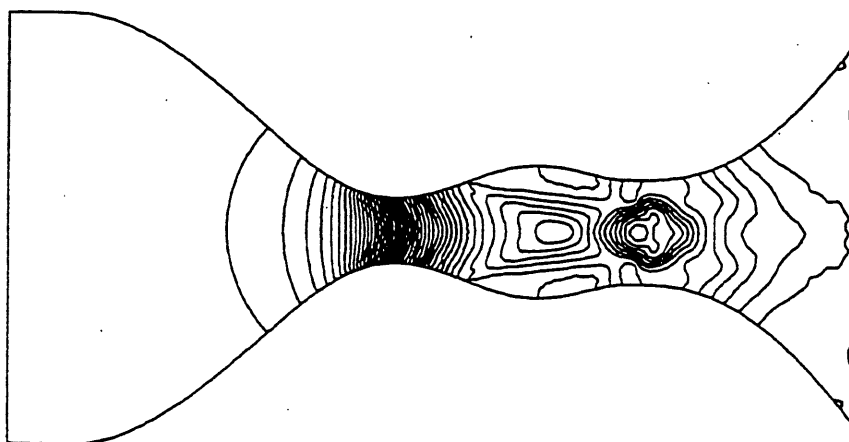


Figure 6.14.3: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.

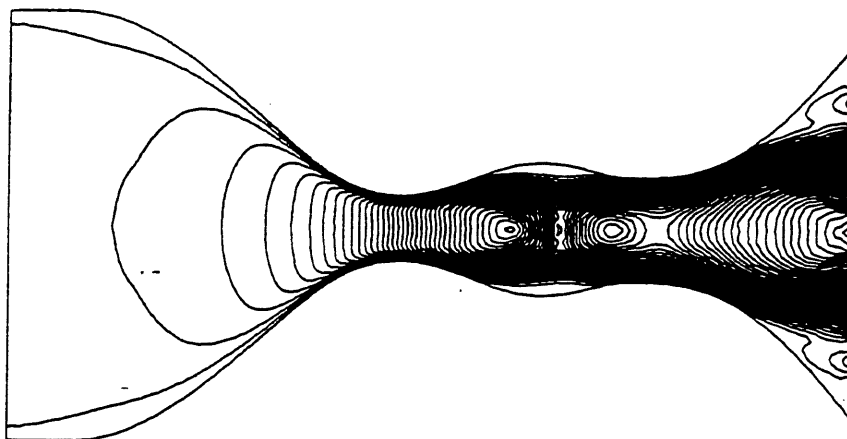


Figure 6.15.1: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$.

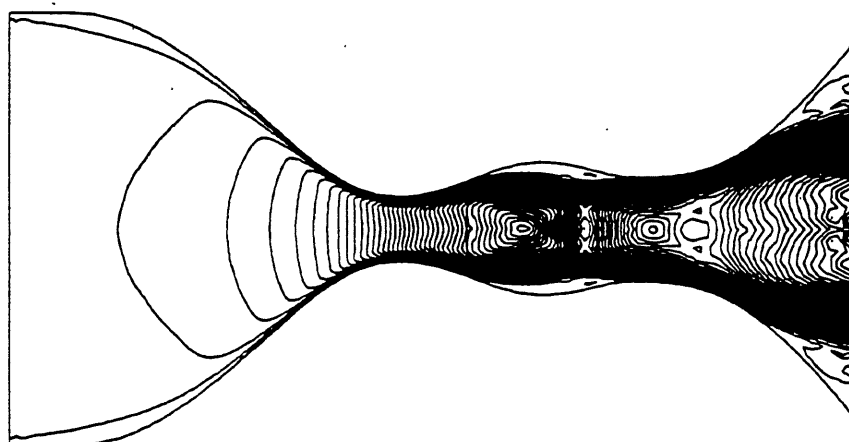


Figure 6.15.2: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.

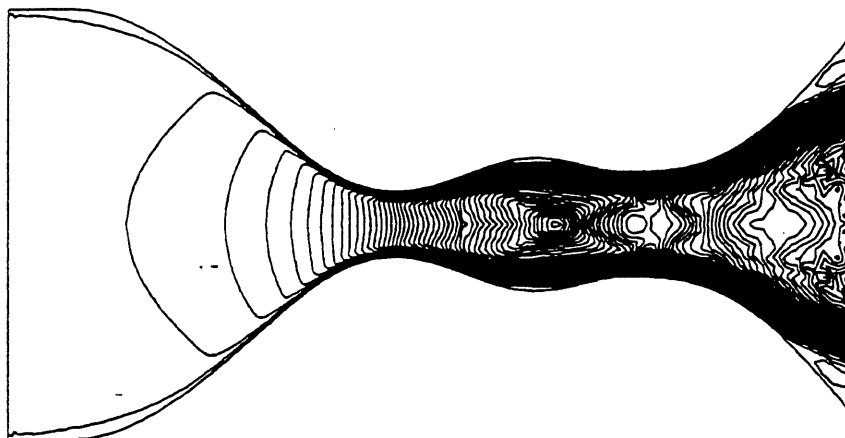


Figure 6.15.3: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.

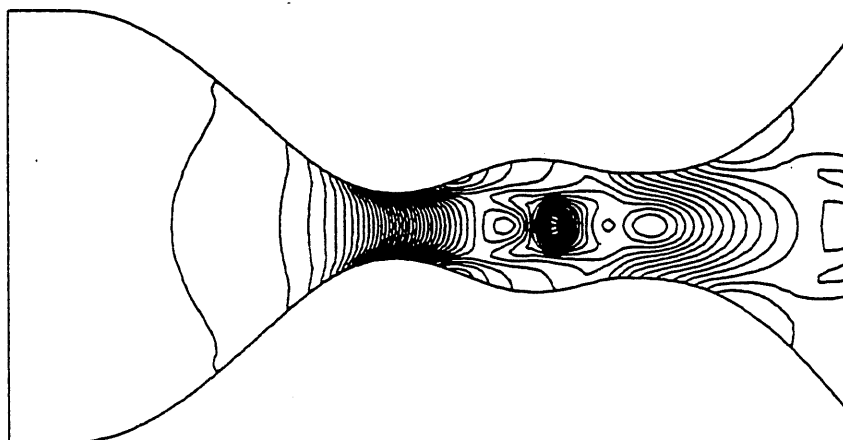


Figure 6.16.1: Lignes iso-densité ($\Delta \rho = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$.

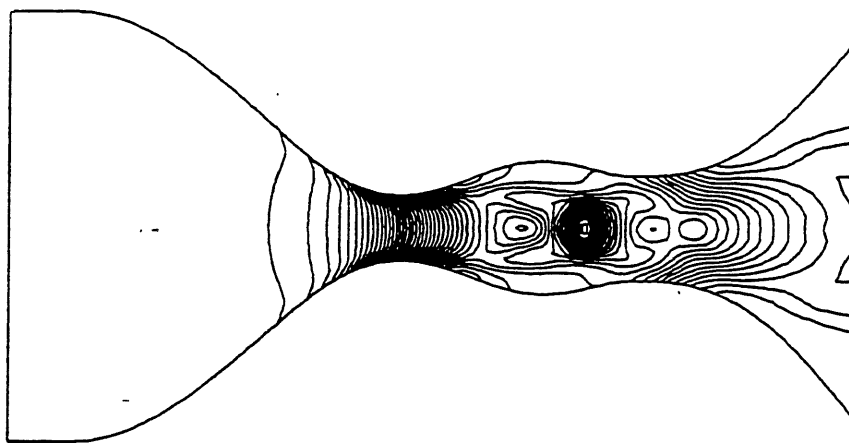


Figure 6.16.2: Lignes iso-densité ($\Delta\rho = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.

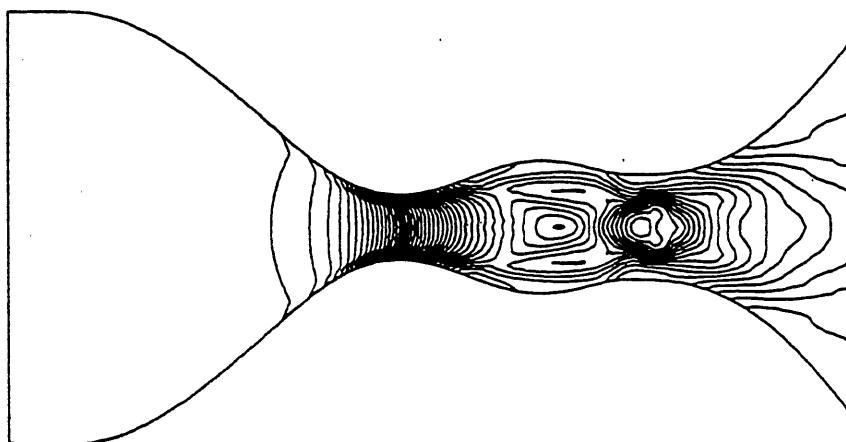


Figure 6.16.3: Lignes iso-densité ($\Delta\rho = 0.05$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.

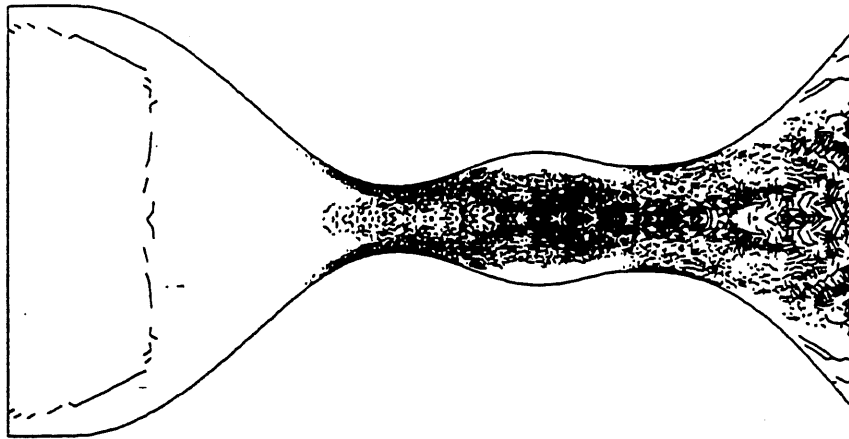


Figure 6.17: Distribution de la viscosité de capture de chocs ($\Delta\mu_{cc} = 10^{-3}$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.

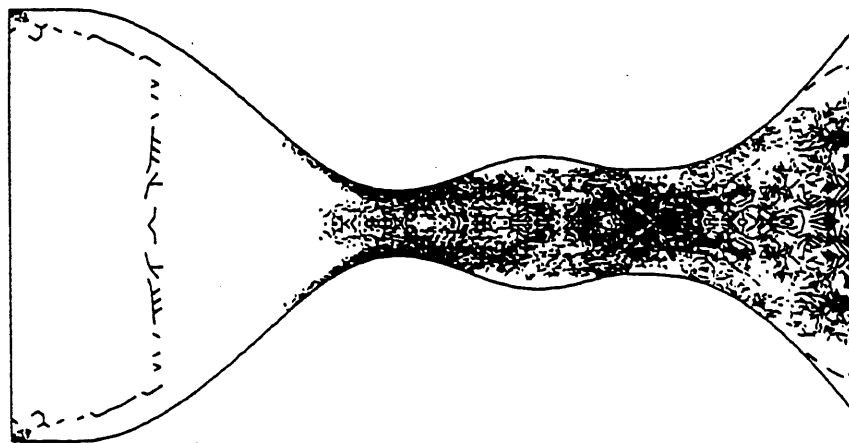


Figure 6.18: Distribution de la viscosité de capture de chocs ($\Delta\mu_{cc} = 10^{-3}$), écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.

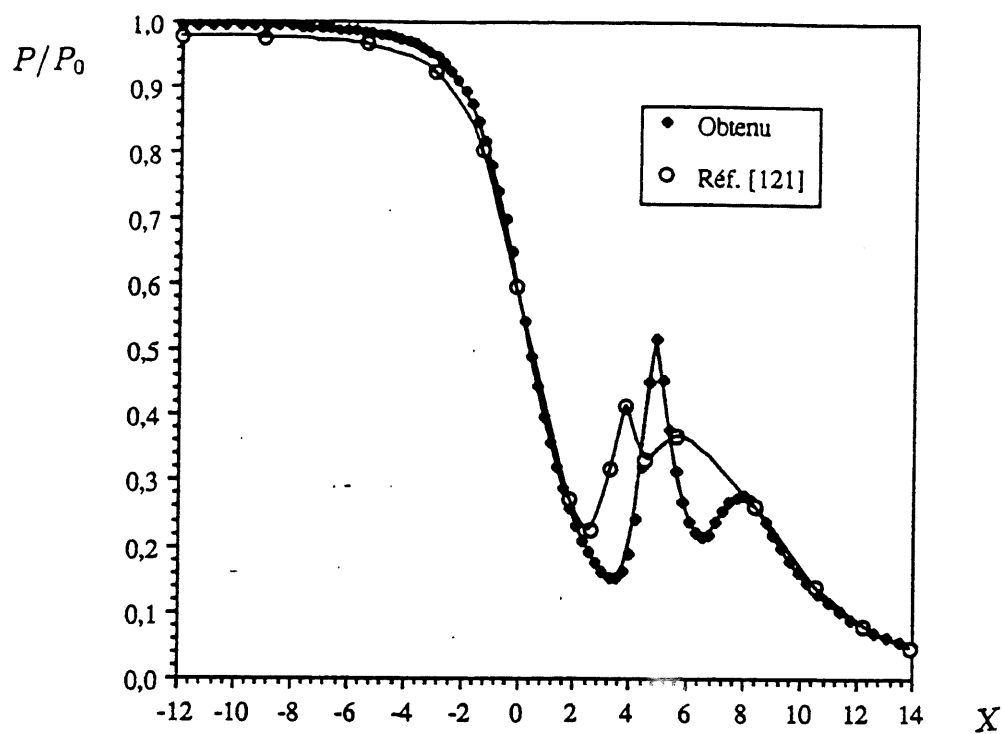


Figure 6.19.1: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$.

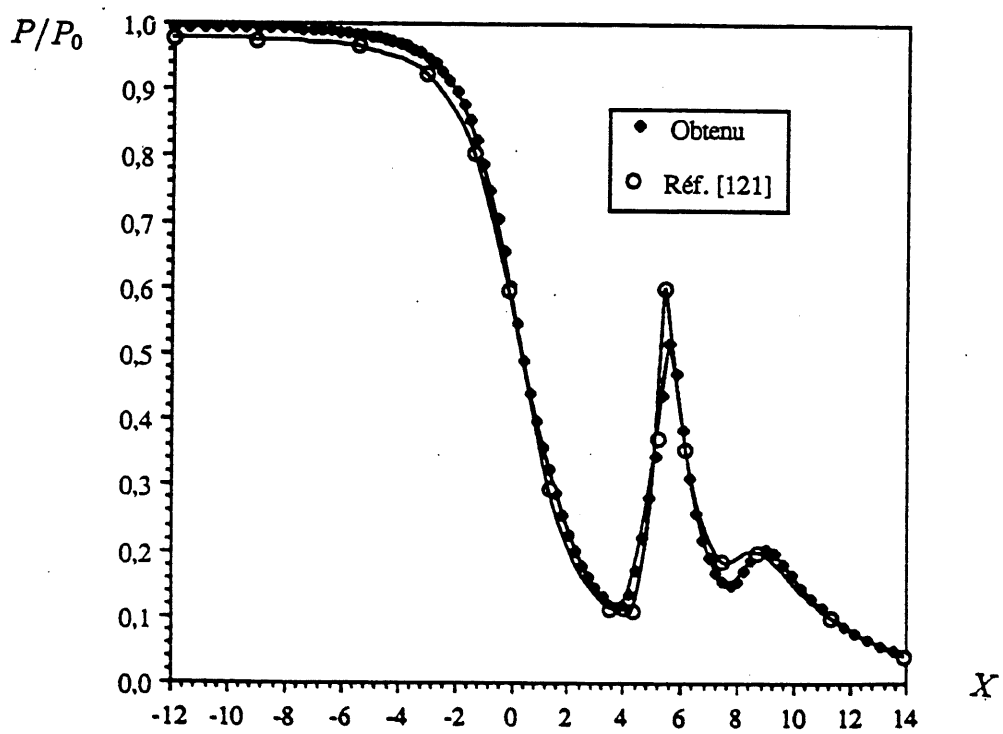


Figure 6.19.2: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.

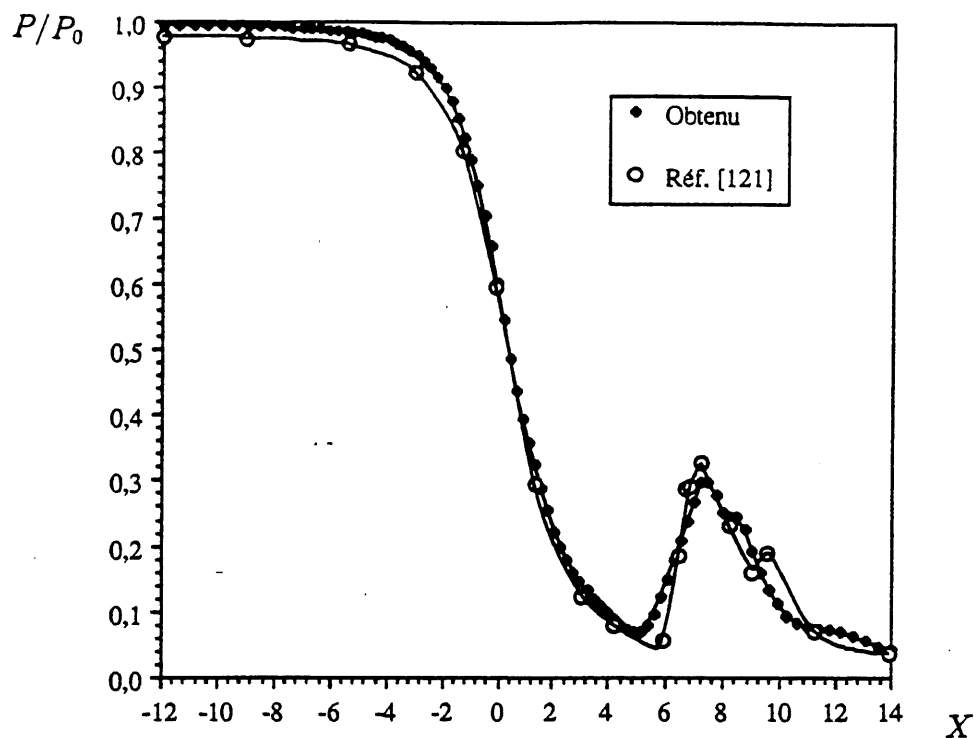


Figure 6.19.3: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.

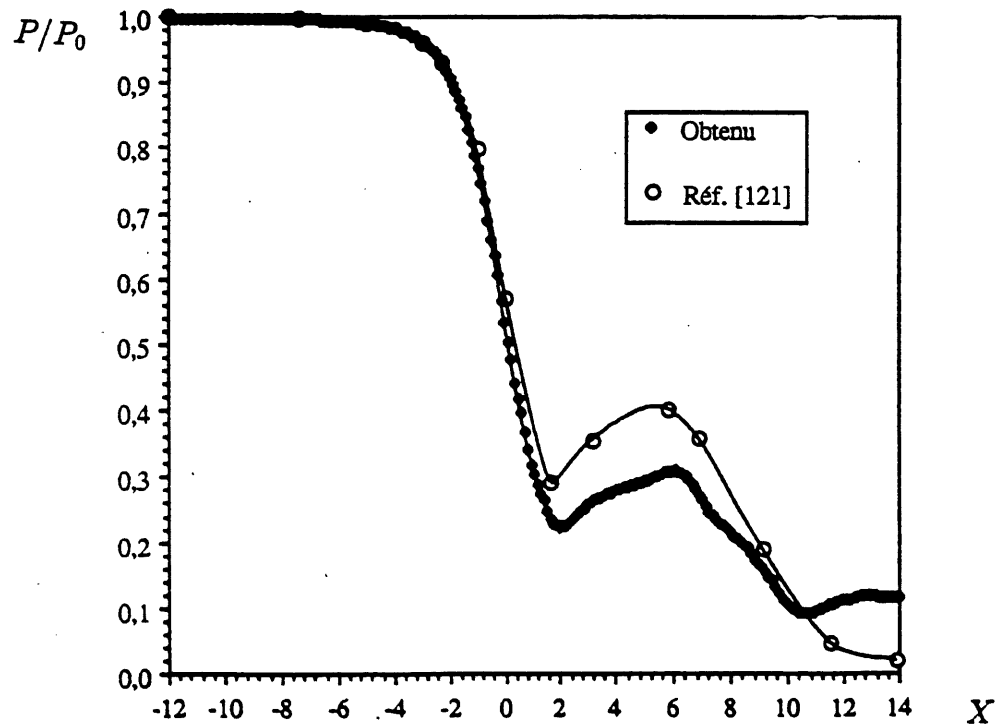


Figure 6.20.1: Pression sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$.

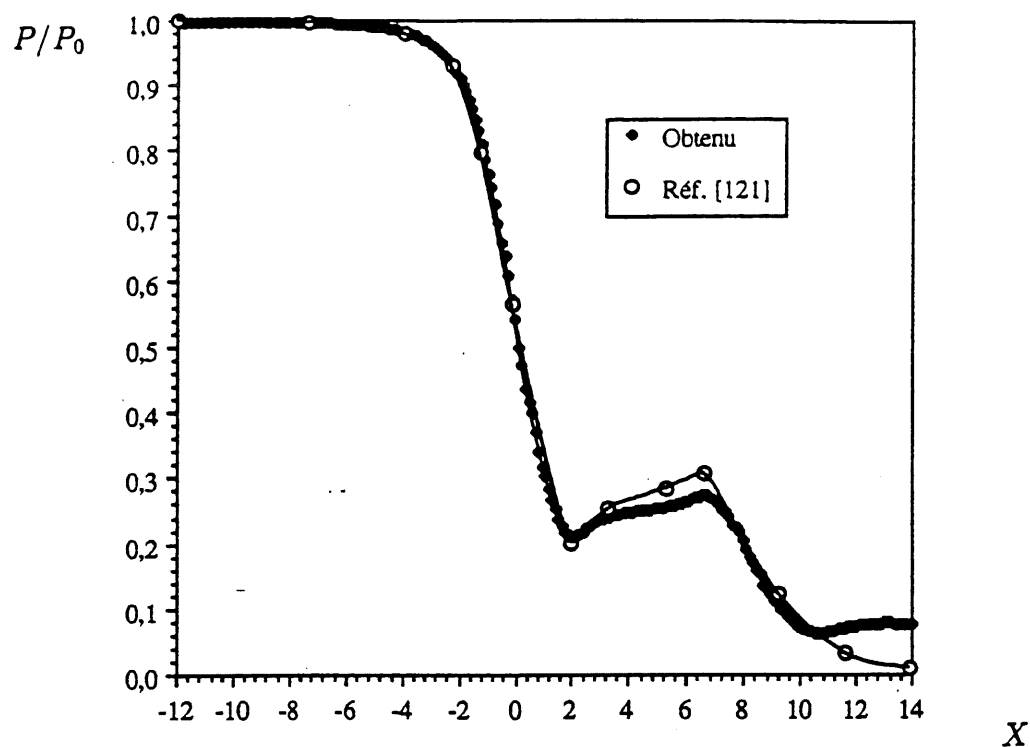


Figure 6.20.2: Pression sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.

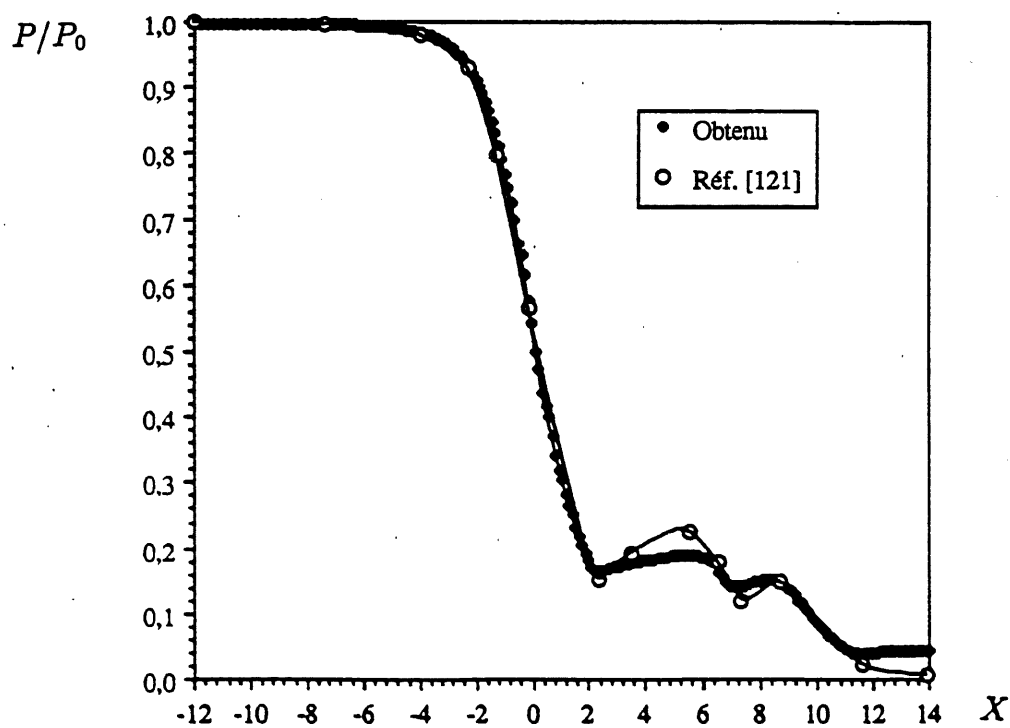


Figure 6.20.3: Pression sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.

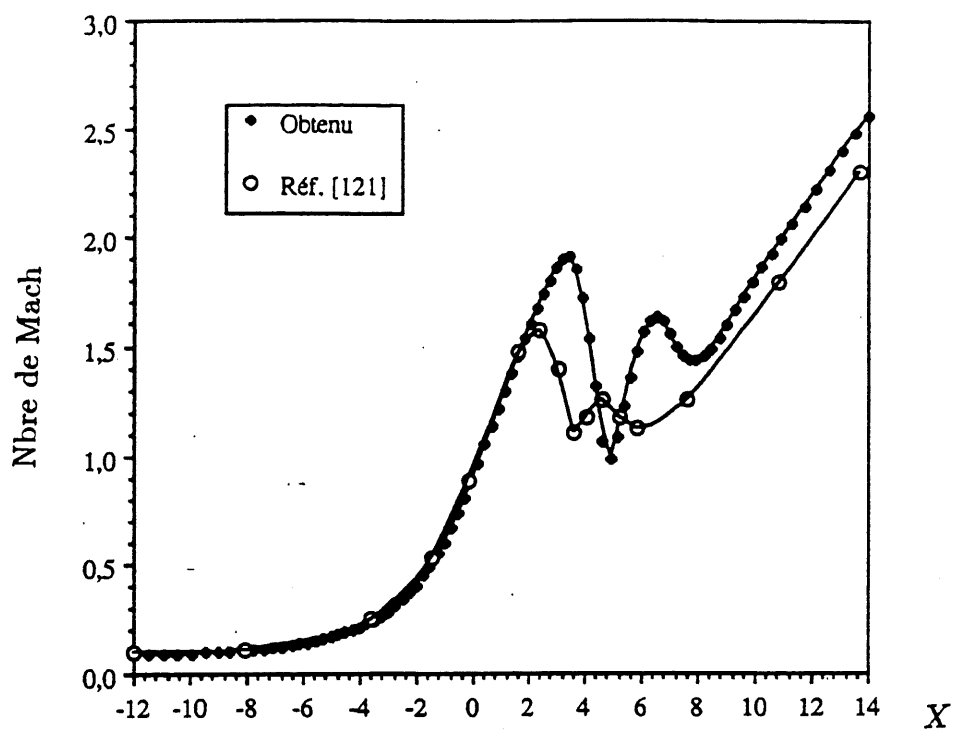


Figure 6.21.1: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$.

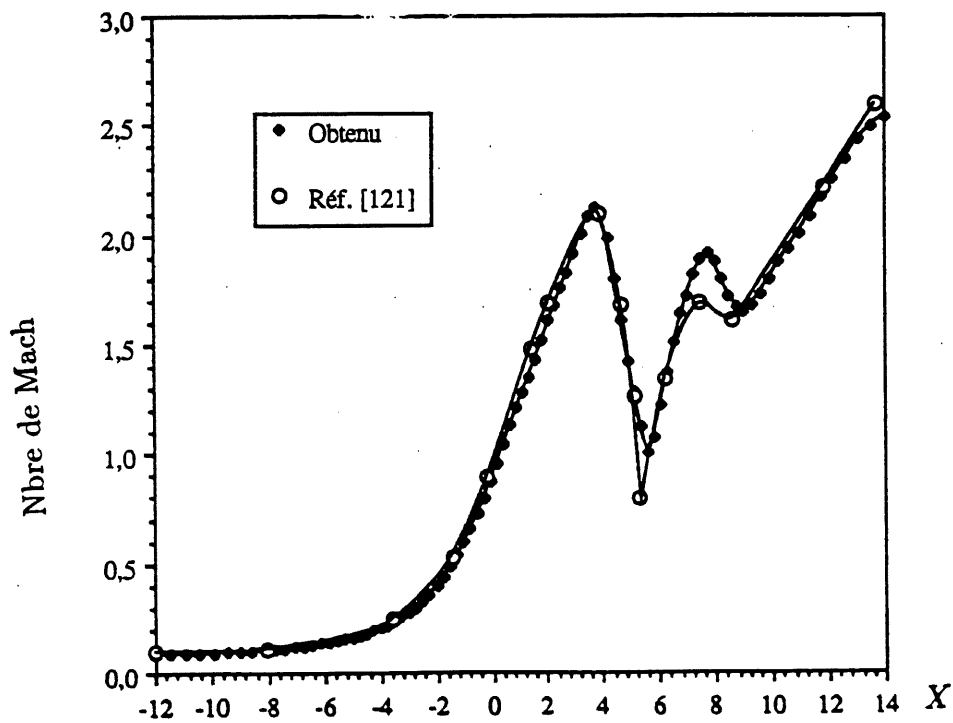


Figure 6.21.2: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.

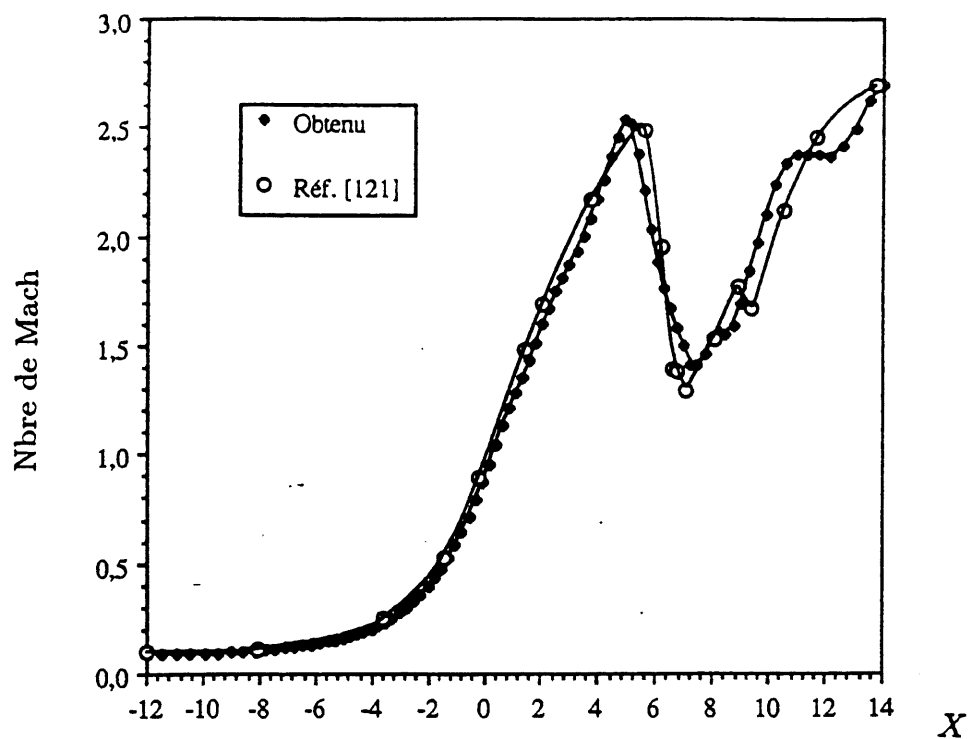


Figure 6.21.3: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.

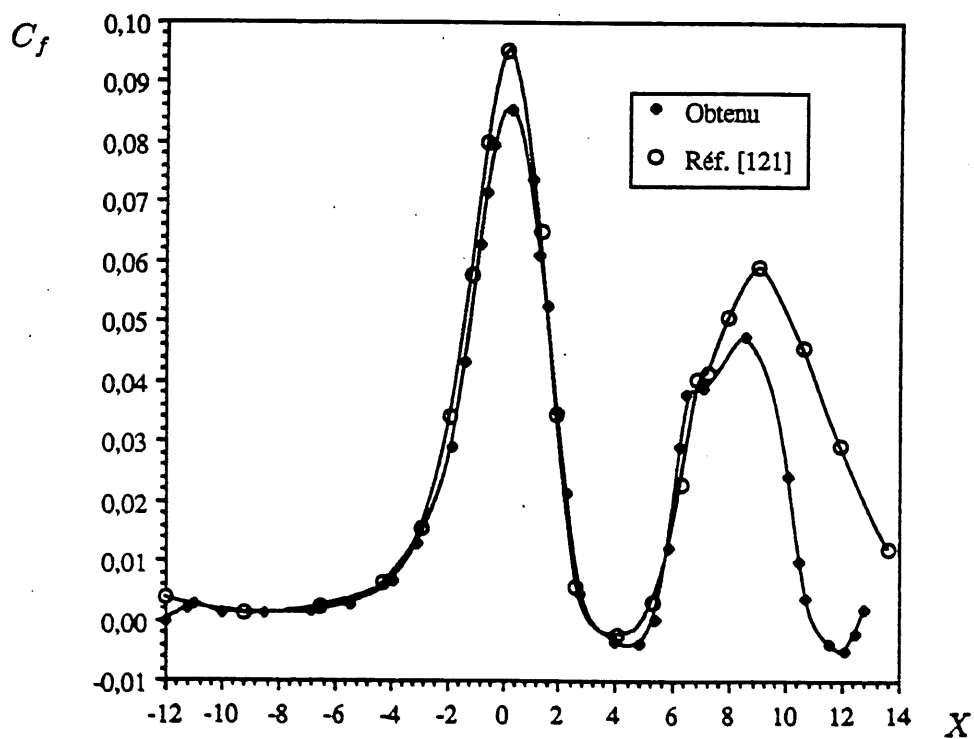


Figure 6.22.1: Coefficient de frottement sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$.

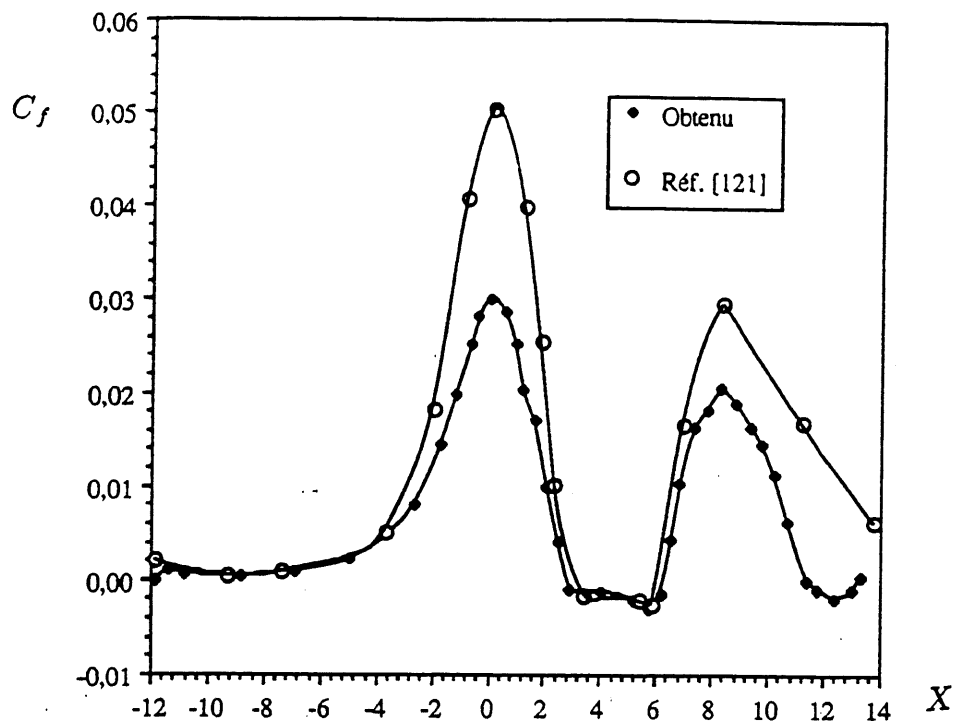


Figure 6.22.2: Coefficient de frottement sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$.

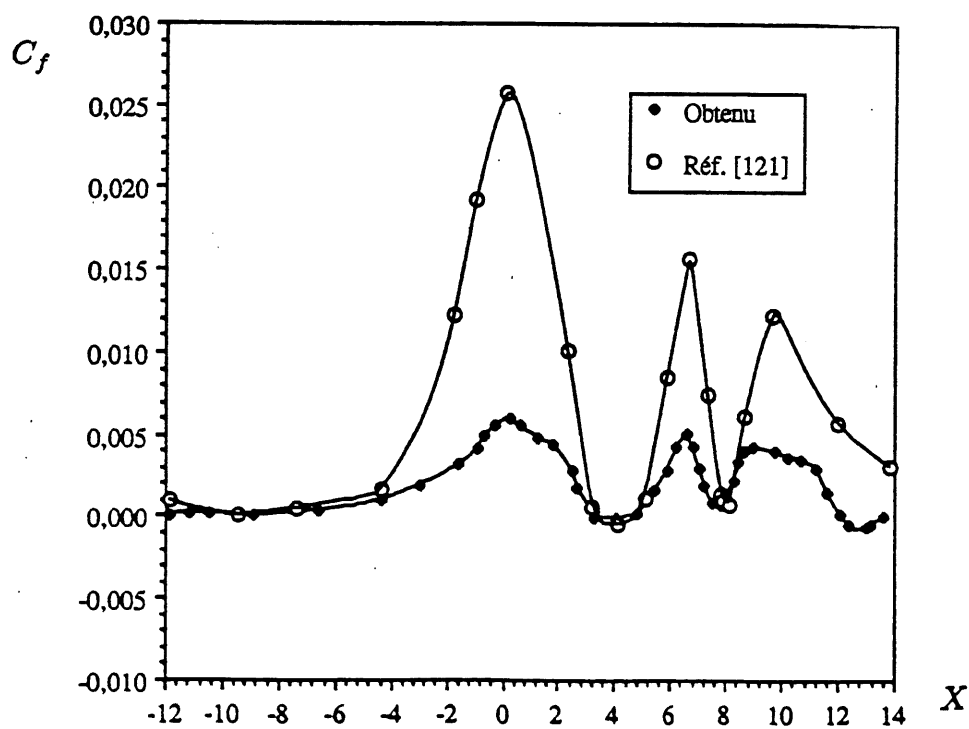
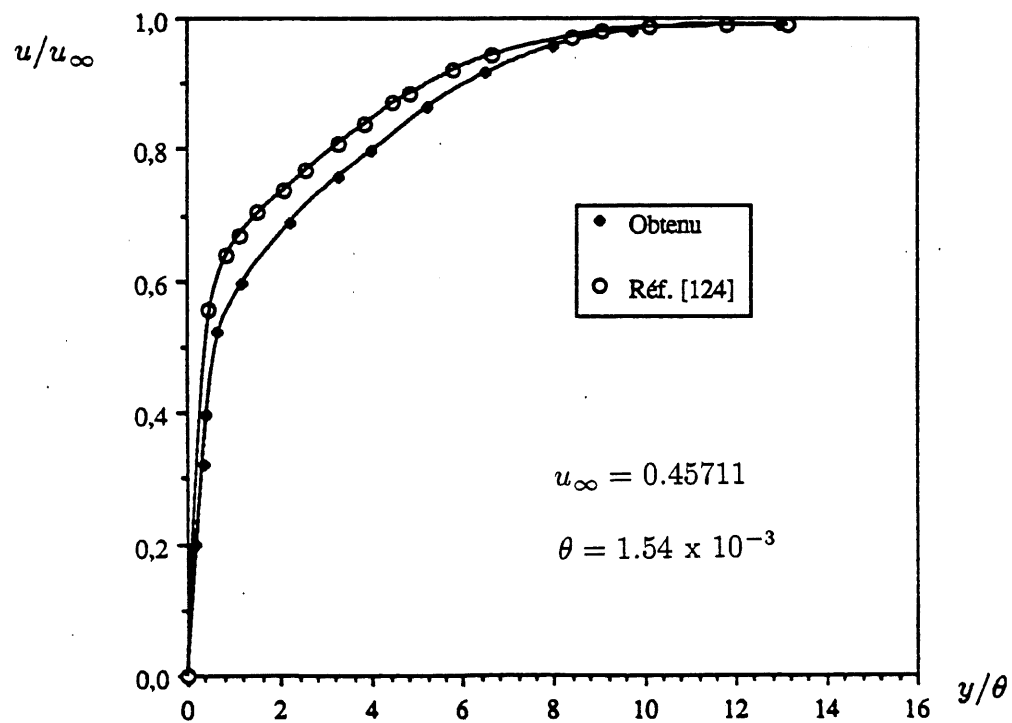


Figure 6.22.3: Coefficient de frottement sur la paroi, écoulement compressible visqueux dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$.

Écoulement compressible turbulent
sur une plaque plane.



Figure 6.23: Plaque plane, maillage.

Figure 6.24: Profil de vitesse longitudinale à la position $x/L = 0.6$, écoulement compressible turbulent sur une plaque plane.

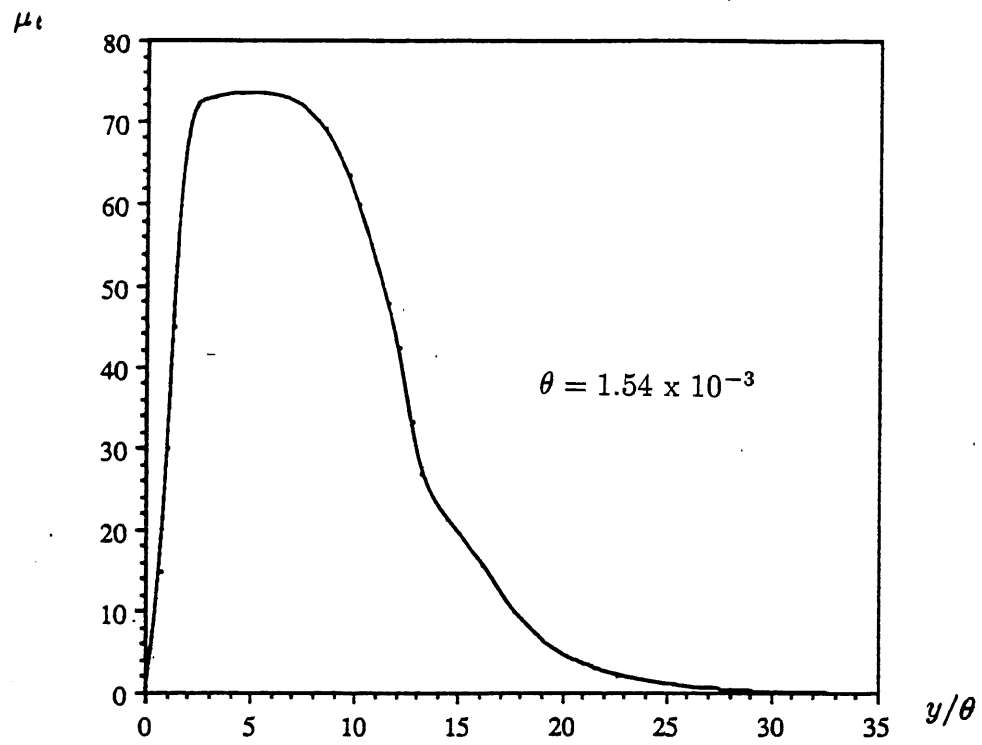


Figure 6.25: Profil de viscosité turbulente à la position $x/L = 0.6$, écoulement compressible turbulent sur une plaque plane.

Écoulement compressible laminaire
dans l'éjecteur "EJECT1".

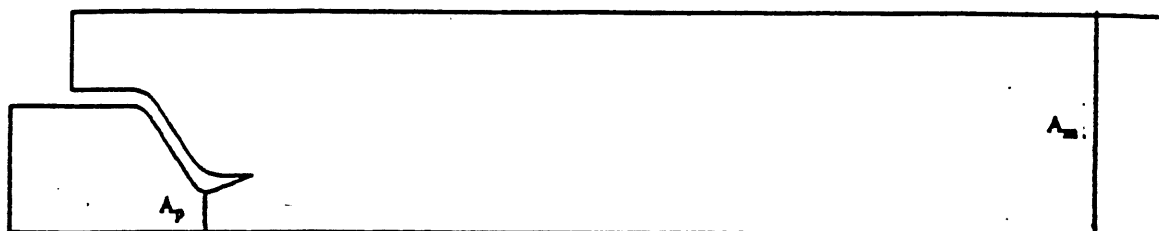


Figure 6.26: Ejecteur "EJECT1", géométrie.



Figure 6.27: Maillage, écoulement compressible laminaire dans l'éjecteur "EJECT1".

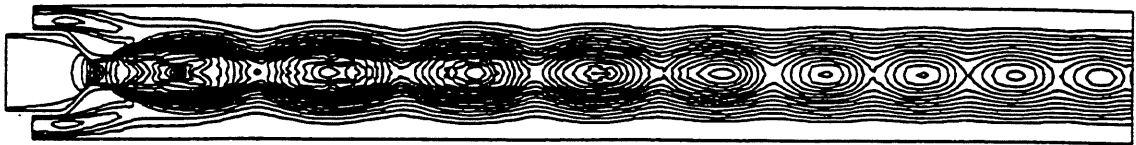


Figure 6.28: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.15$), écoulement compressible laminaire dans l'éjecteur "EJECT1".

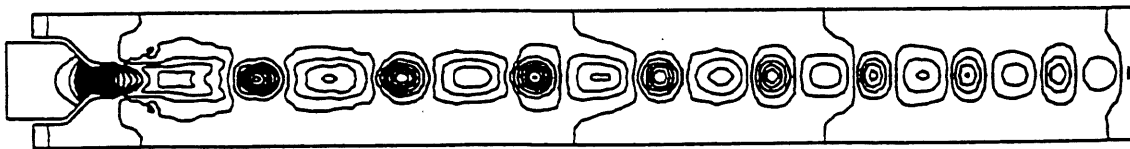


Figure 6.29: Lignes isobares ($\Delta P = 0.02$), écoulement compressible laminaire dans l'éjecteur "EJECT1".

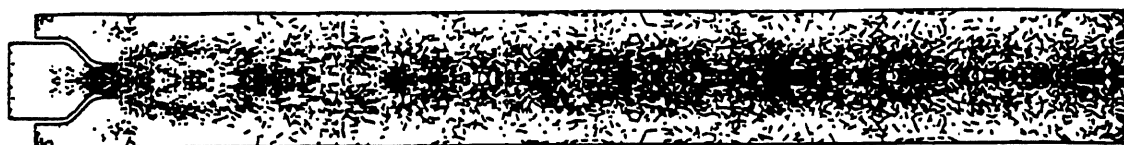


Figure 6.30: Distribution de la viscosité de capture de chocs ($\Delta\mu_{cc} = 0.0005$), écoulement compressible laminaire dans l'éjecteur "EJECT1".

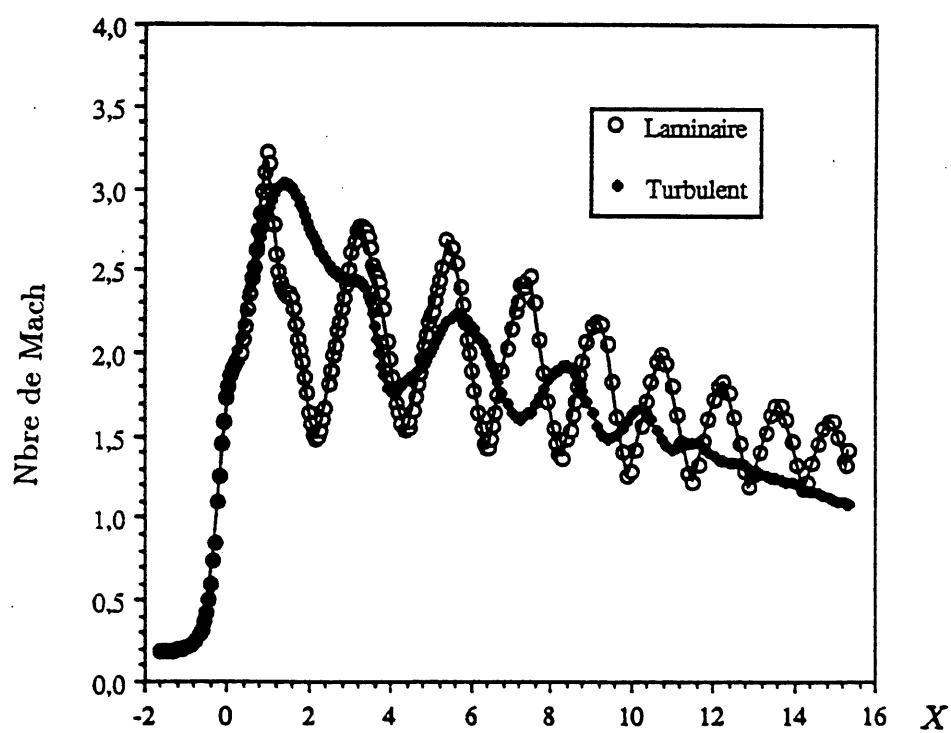


Figure 6.31: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

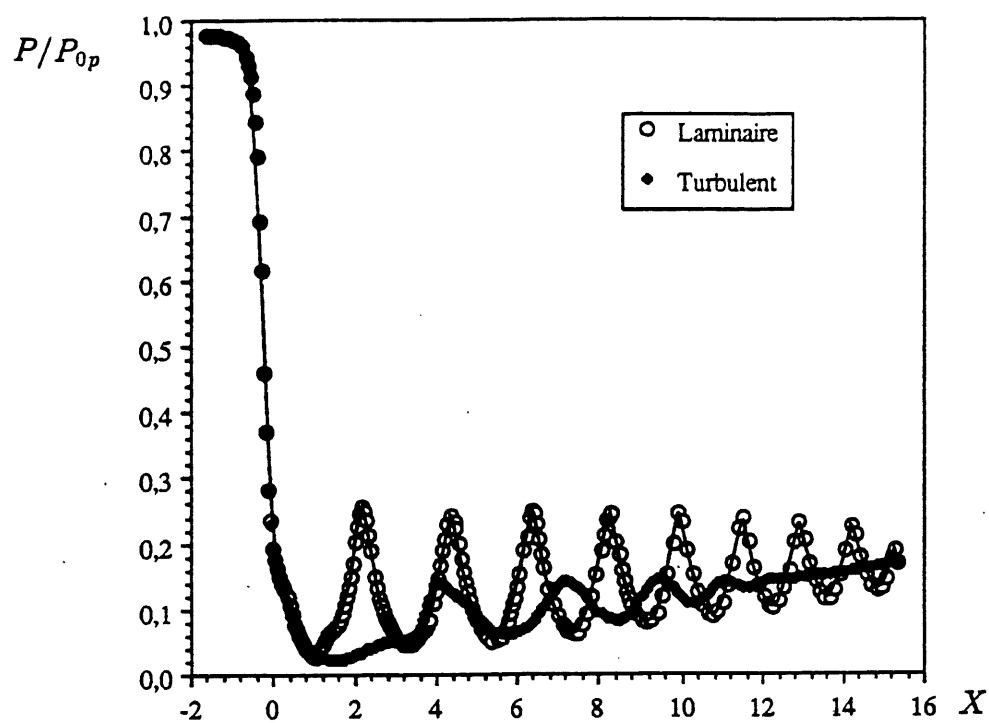


Figure 6.32: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

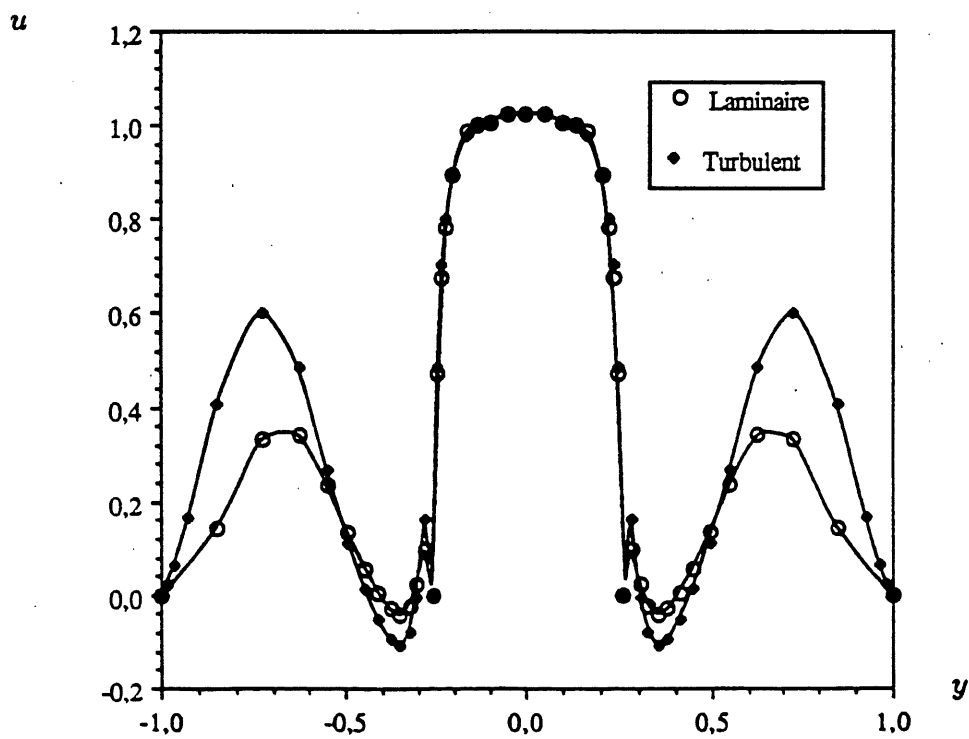


Figure 6.33.1: Profils de vitesse longitudinale à l'entrée de la zone de mélange, écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

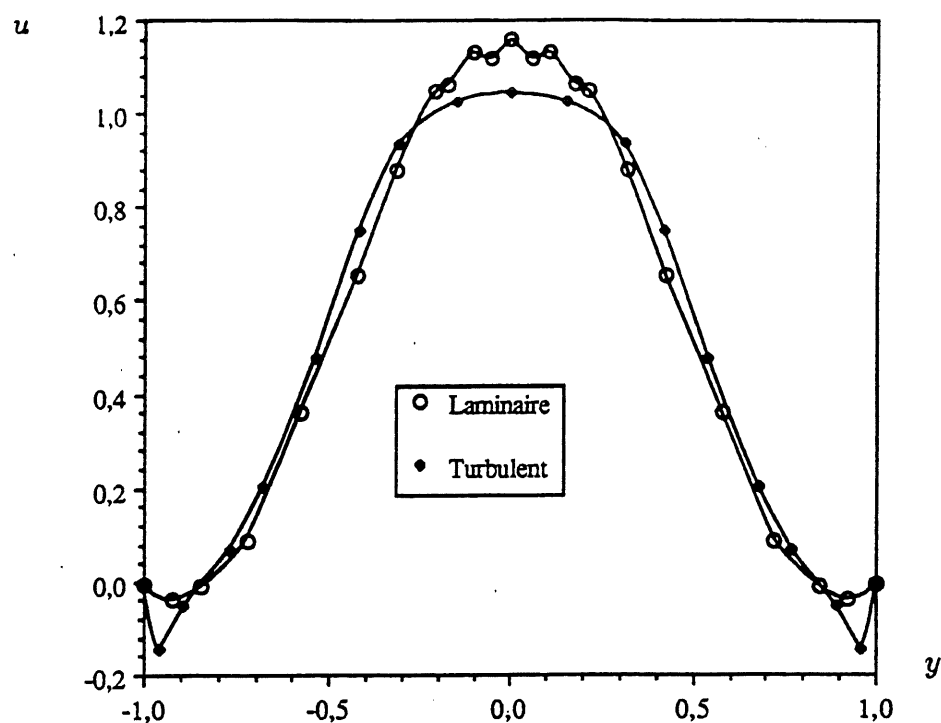


Figure 6.33.2: Profils de vitesse longitudinale au milieu de la zone de mélange, écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

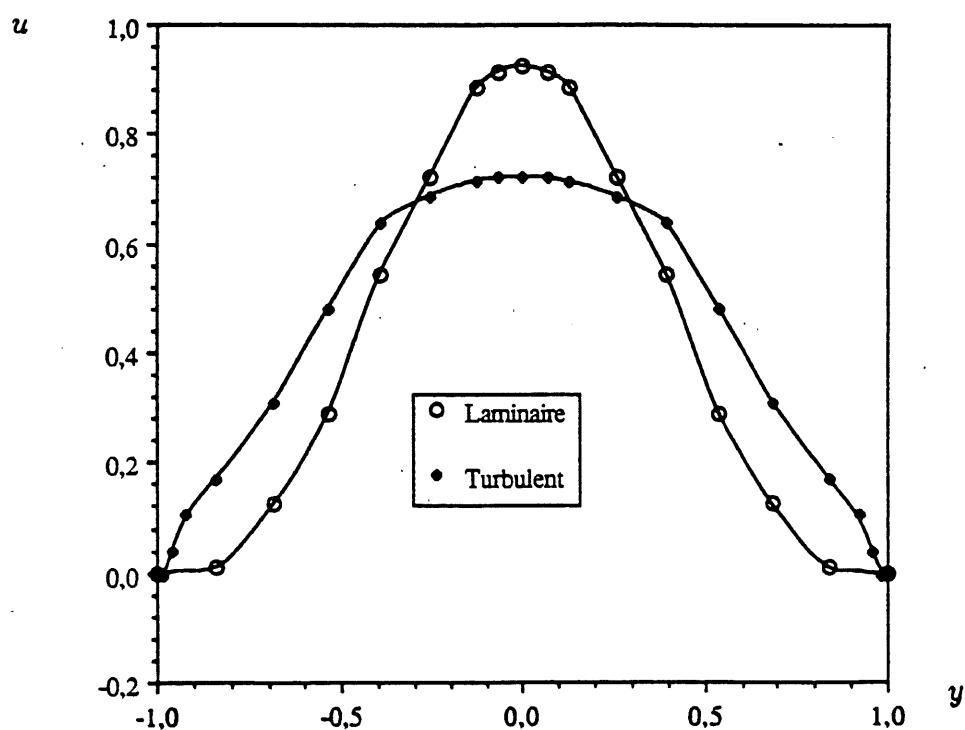


Figure 6.33.3: Profils de vitesse longitudinale à la sortie de la zone de mélange, écoulement compressible laminaire et turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

Écoulement compressible turbulent
dans l'éjecteur "EJECT1".

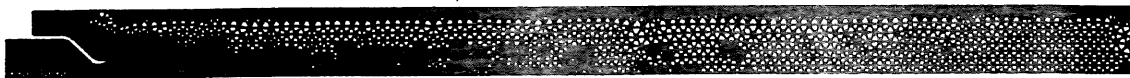


Figure 6.34: Maillage, écoulement compressible
turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".



Figure 6.35: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.1$), écoulement compressible
turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

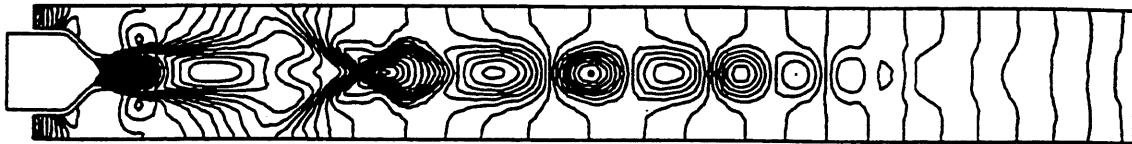


Figure 6.36: Lignes isobares ($\Delta P = 0.005$), écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".



Figure 6.37: Visualisation expérimentale donnée par Fabri et Siestrunk [29]

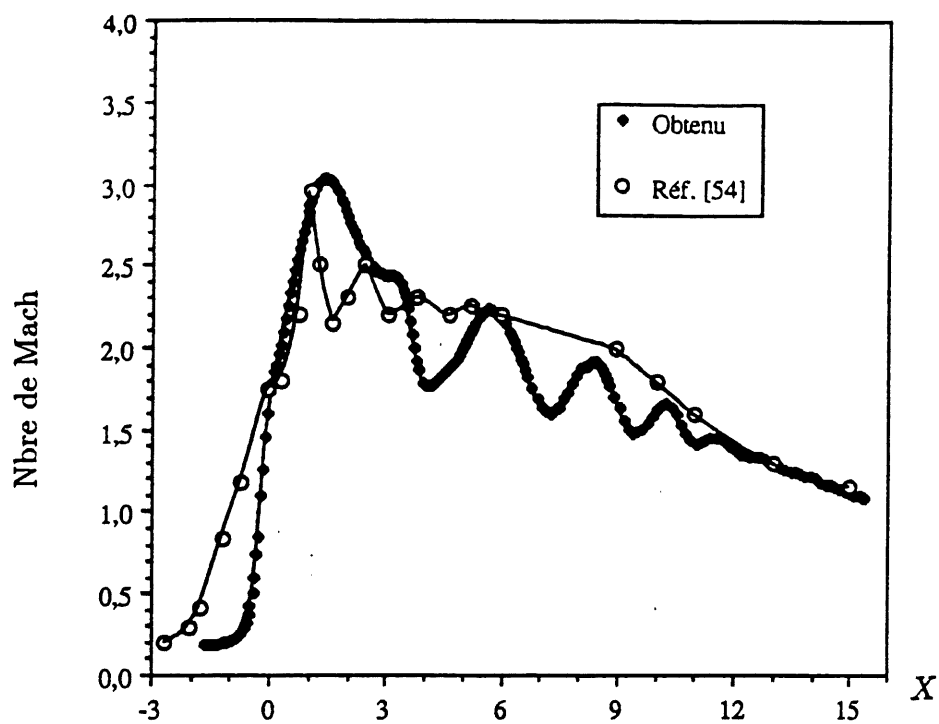


Figure 6.38: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

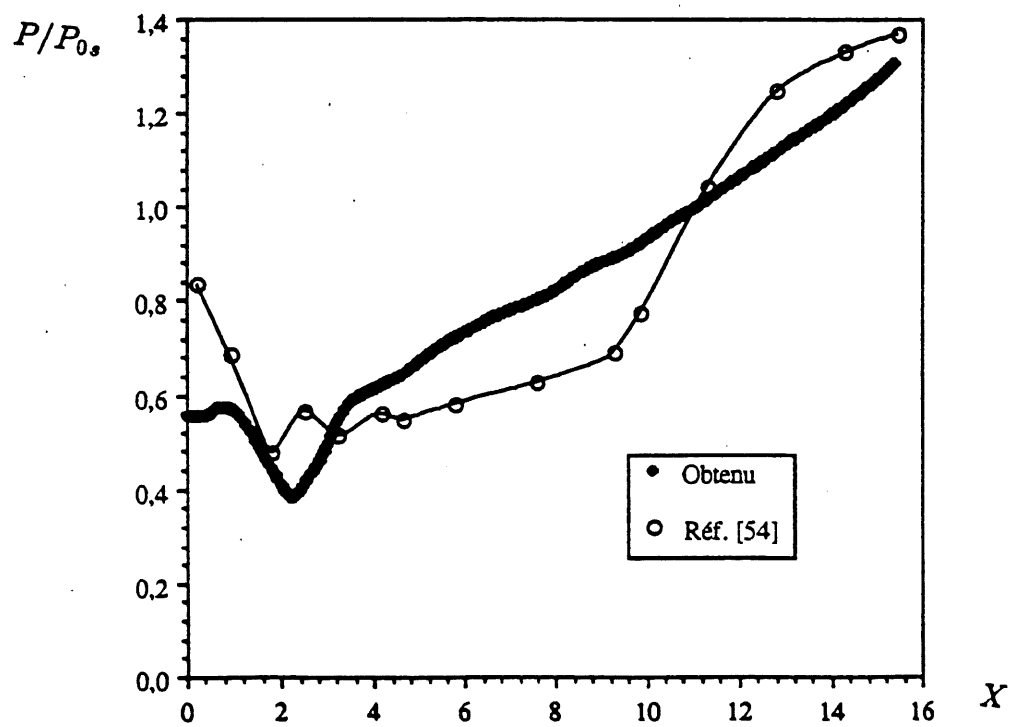


Figure 6.39: Pression sur la paroi de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

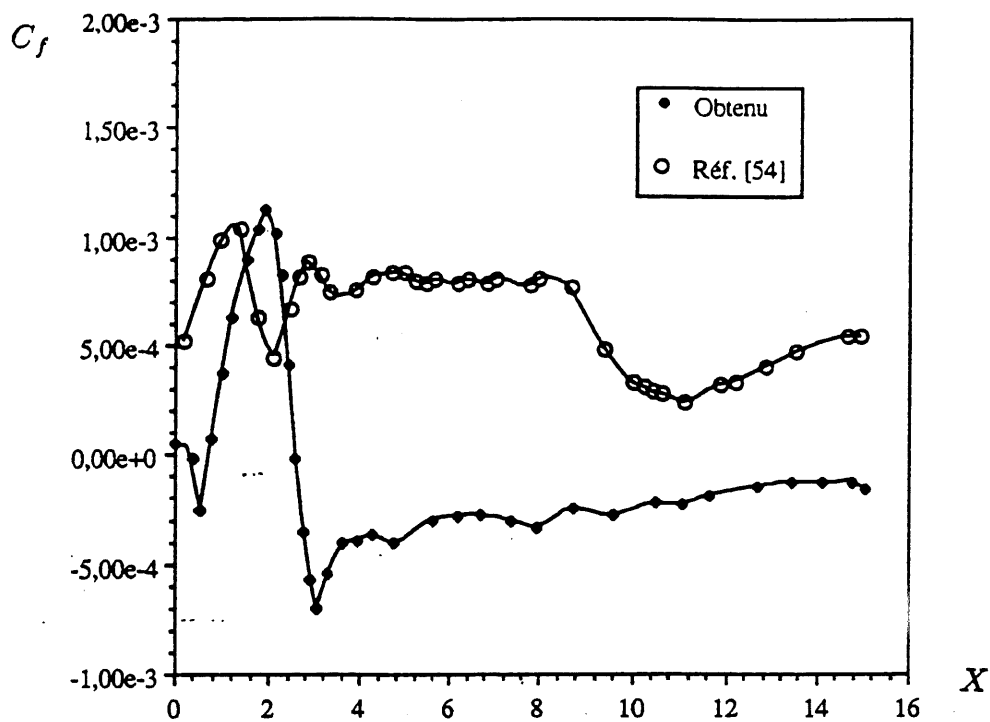


Figure 6.40: Coefficient de frottement sur la paroi de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

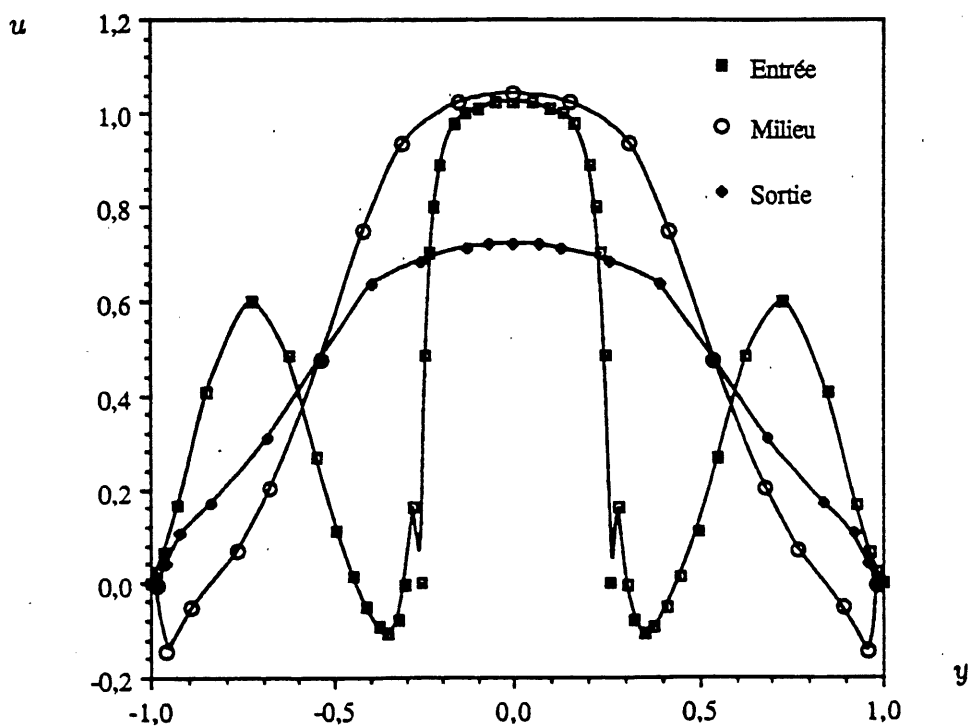


Figure 6.41: Profils de vitesse longitudinale le long de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

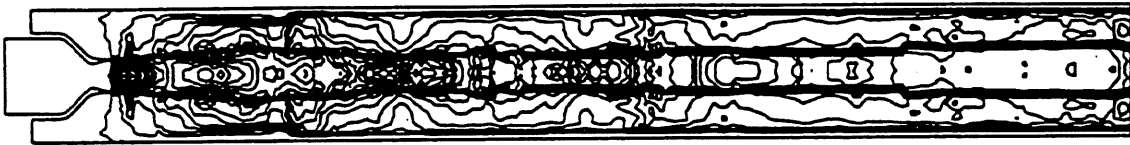


Figure 6.42: Lignes iso-viscosité turbulente ($\Delta\mu_t = 10.0$),
écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

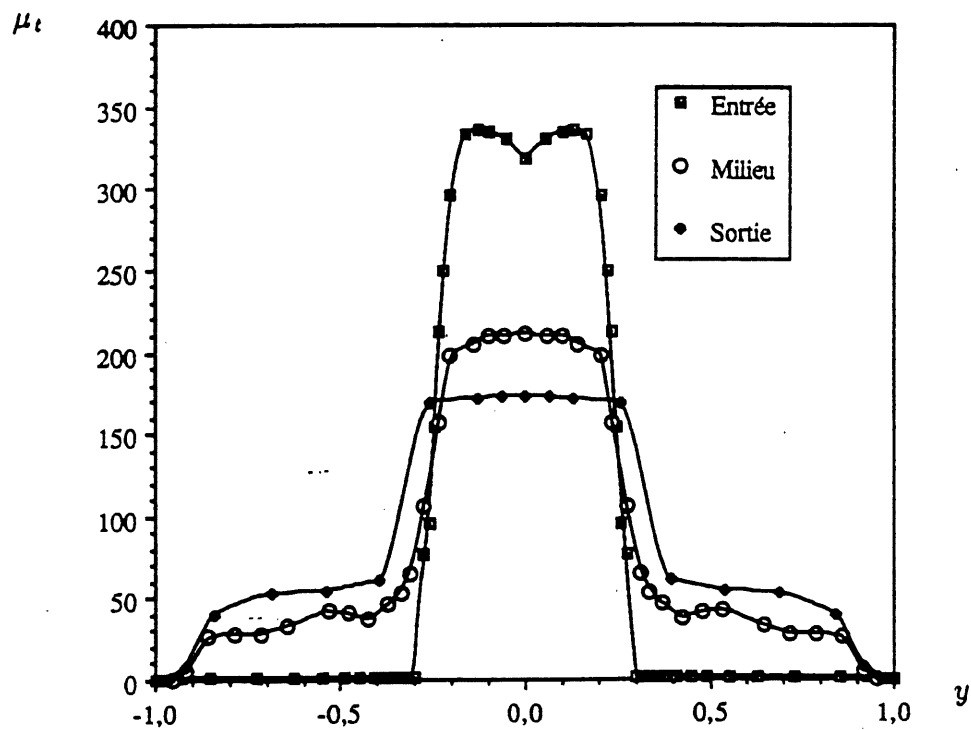


Figure 6.43: Profils de viscosité turbulente le long de la zone de mélange.
écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT1".

Écoulement compressible turbulent
dans l'éjecteur "EJECT2".

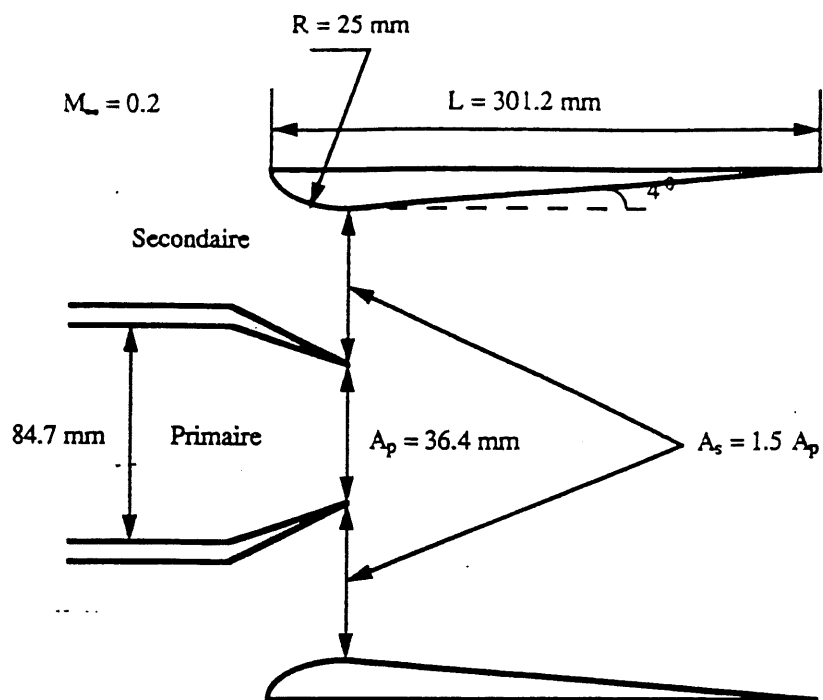


Figure 6.44: Ejecteur "EJECT2", géométrie.

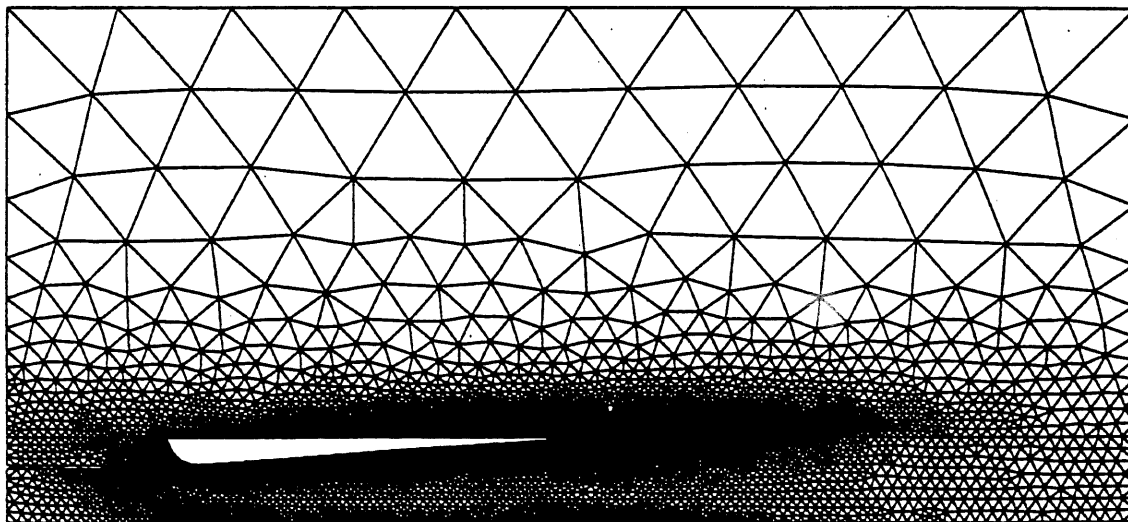


Figure 6.45: Ejecteur "EJECT2", maillage.



Figure 6.46: Lignes iso-Mach ($\Delta M = 0.05$), écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

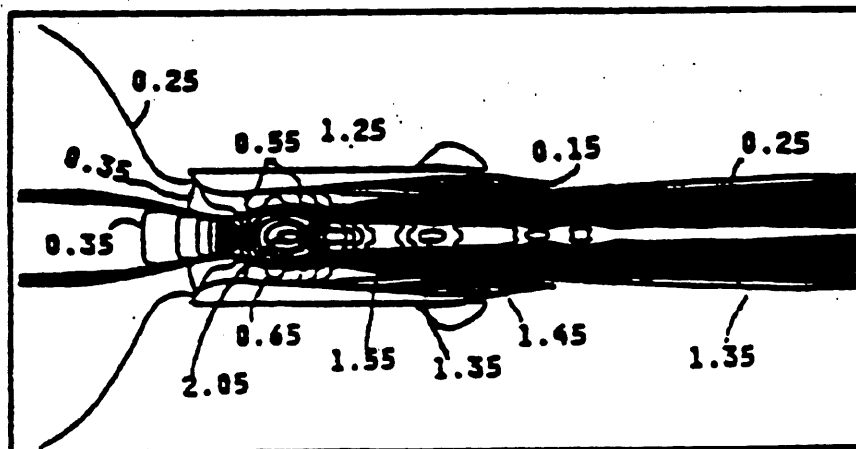


Figure 6.47: Lignes iso-Mach [52], écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

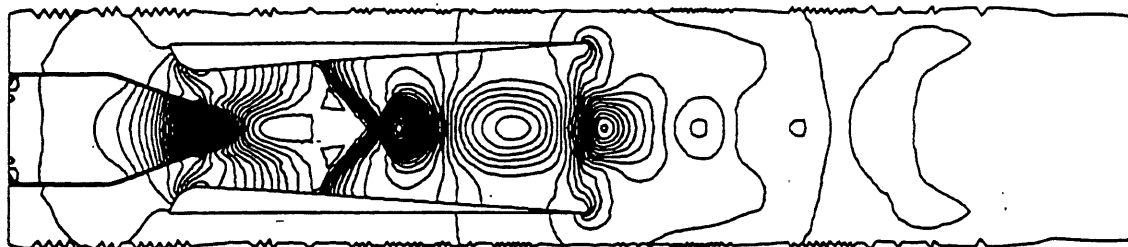


Figure 6.48: Lignes isobares ($\Delta P = 0.01$), écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

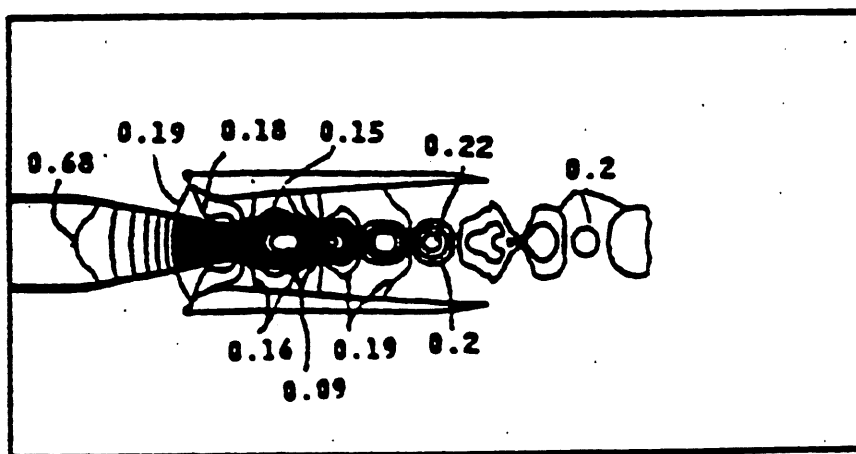


Figure 6.49: Lignes isobares [52], écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

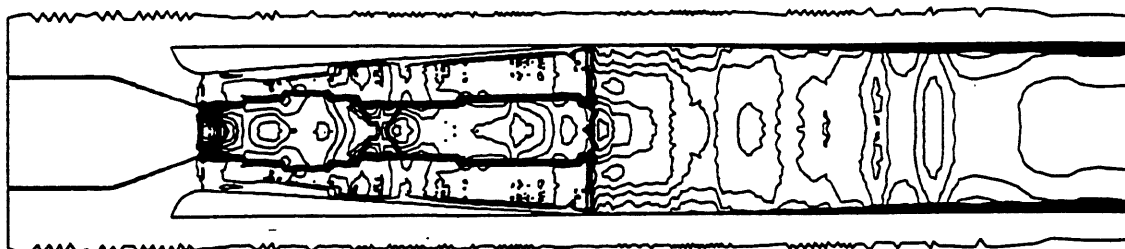


Figure 6.50: Lignes iso-viscosité turbulente ($\Delta\mu_t = 20000.0$), écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

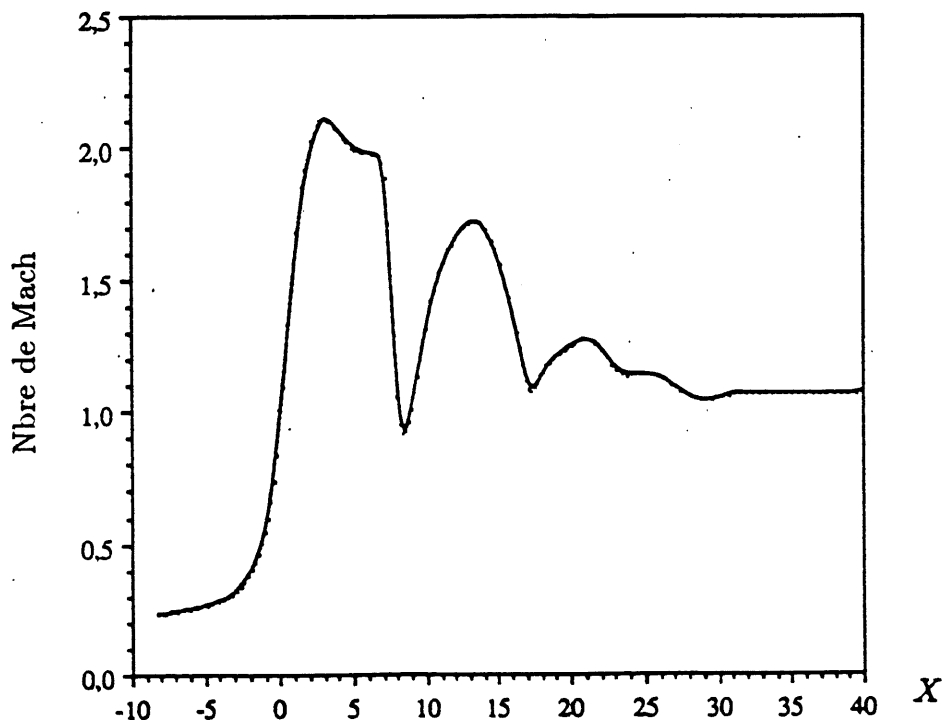


Figure 6.51: Nombre de Mach sur l'axe de symétrie, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

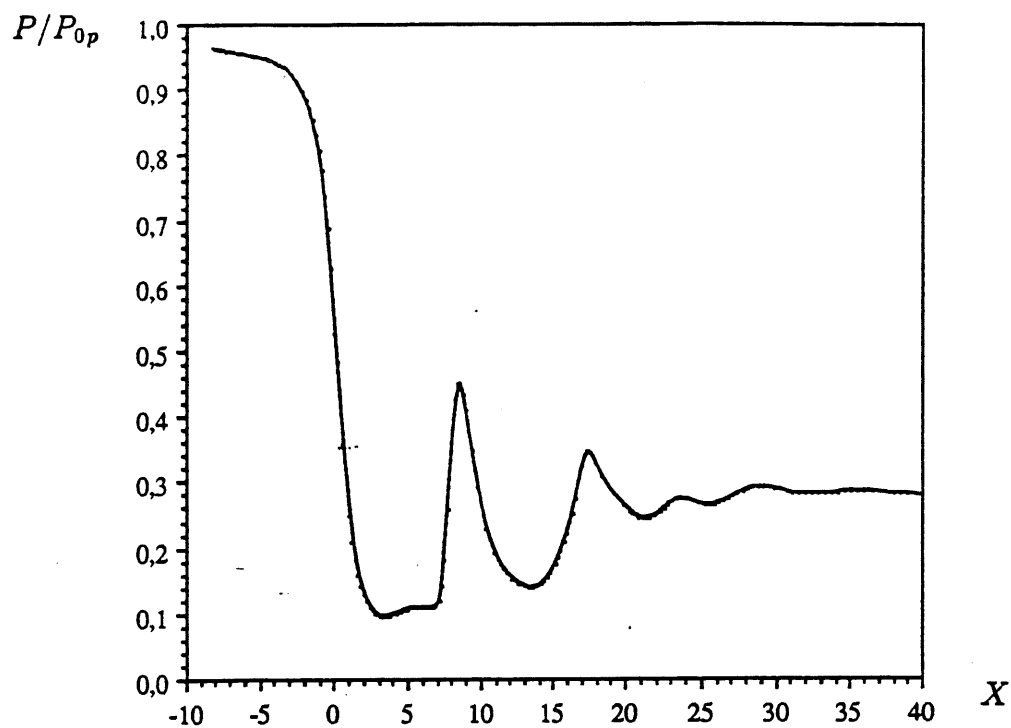


Figure 6.52: Pression sur l'axe de symétrie, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

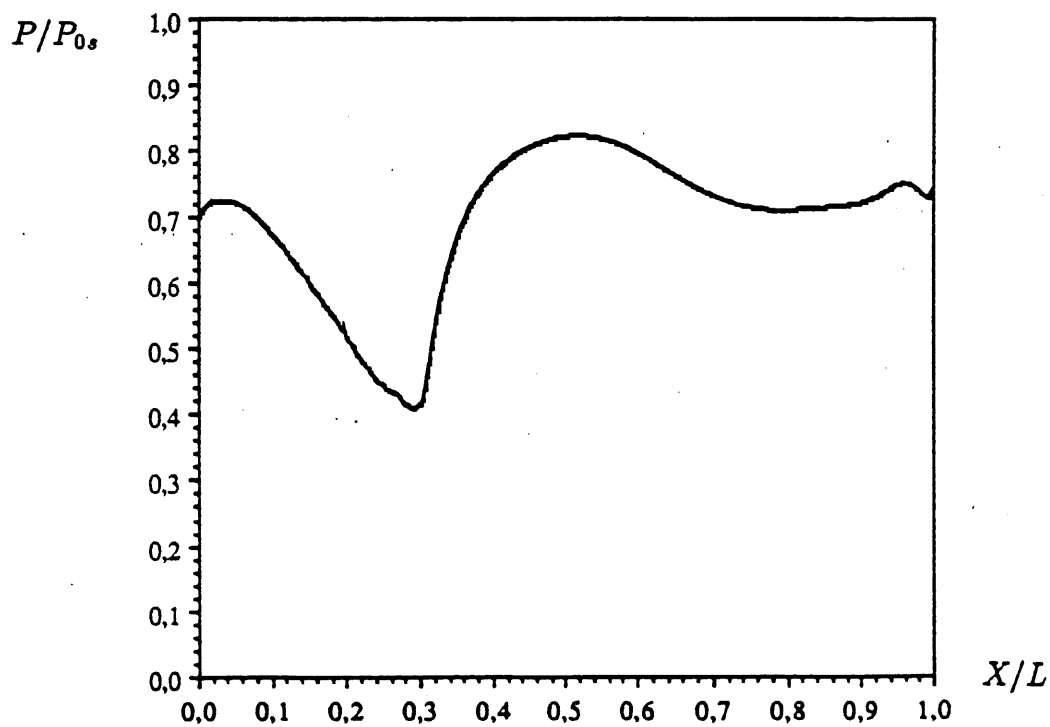


Figure 6.53: Pression sur la paroi de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

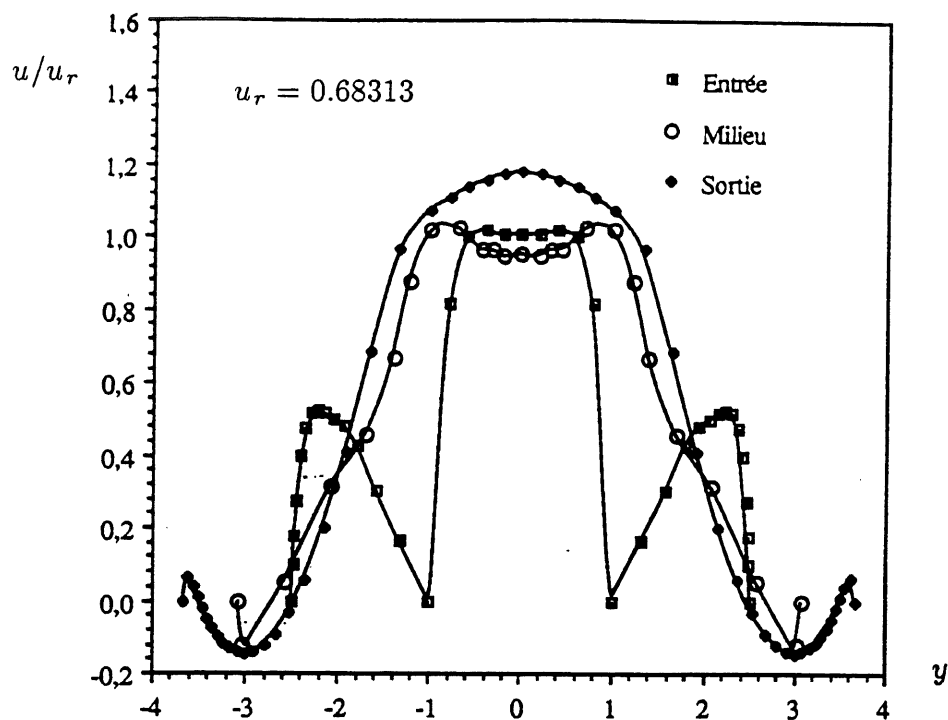


Figure 6.54: Profils de vitesse longitudinale le long de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

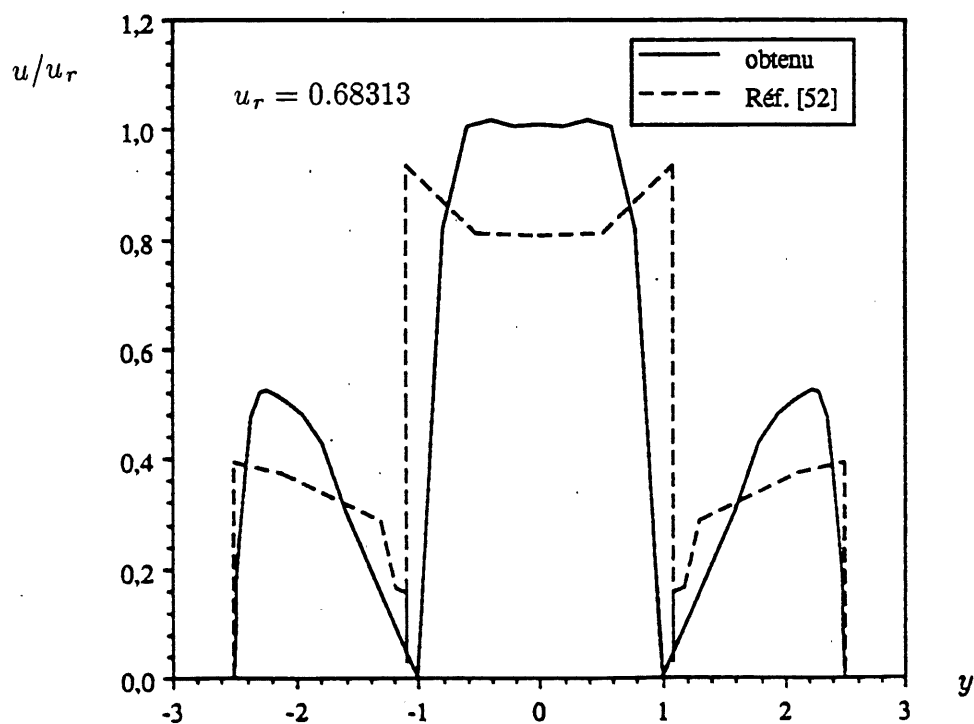


Figure 6.55.1 : Profil de vitesse longitudinale à l'entrée de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

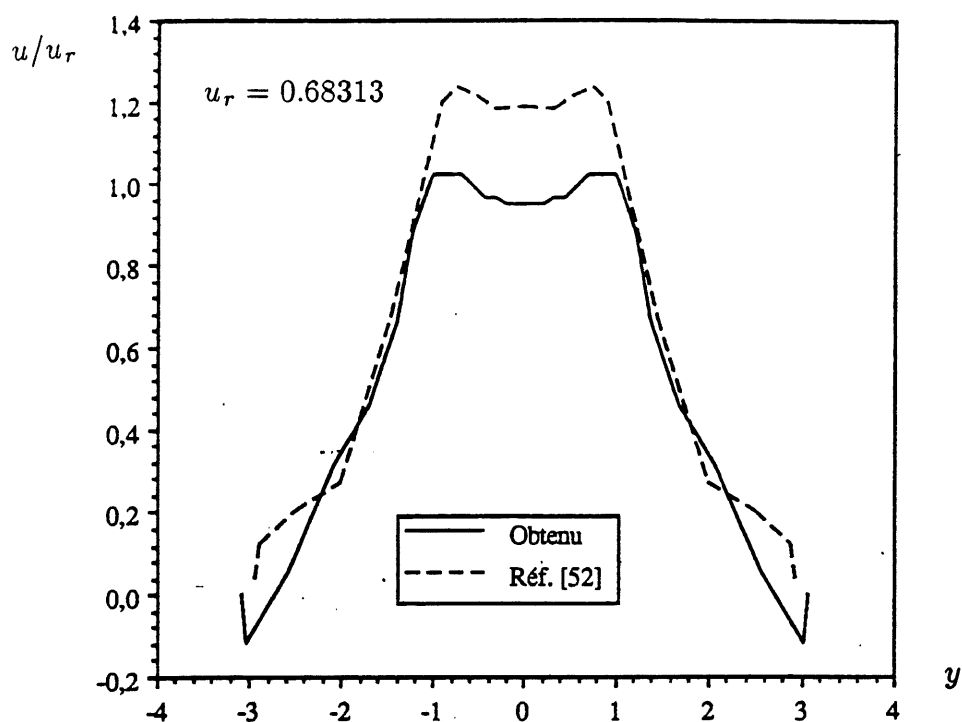


Figure 6.55.2: Profil de vitesse longitudinale au milieu de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

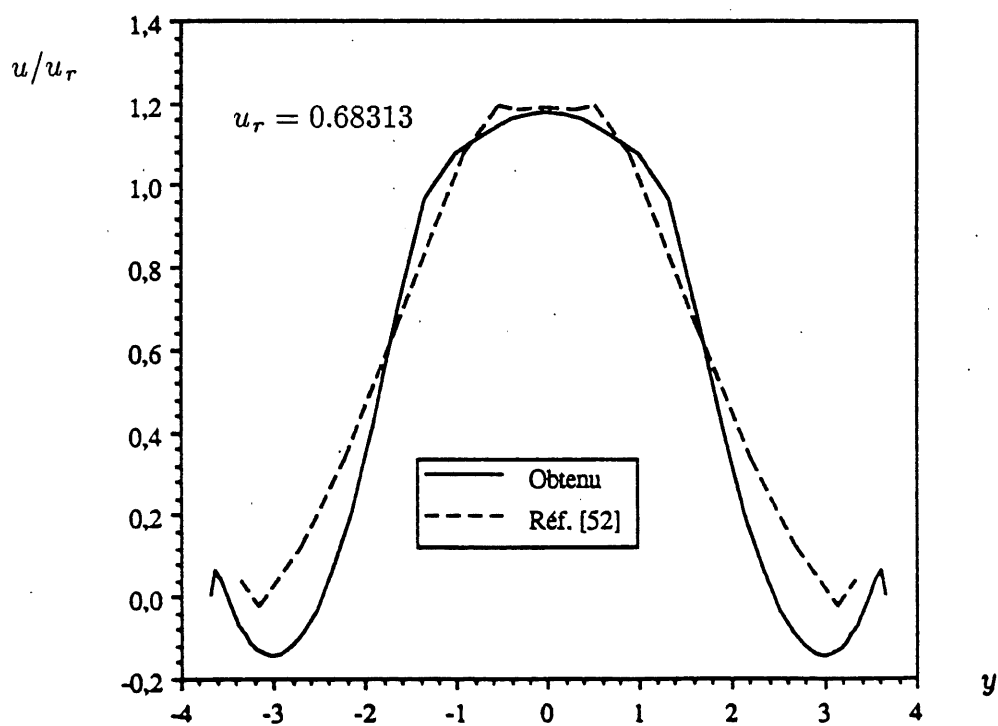


Figure 6.55.3 : Profil de vitesse longitudinale à la sortie de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

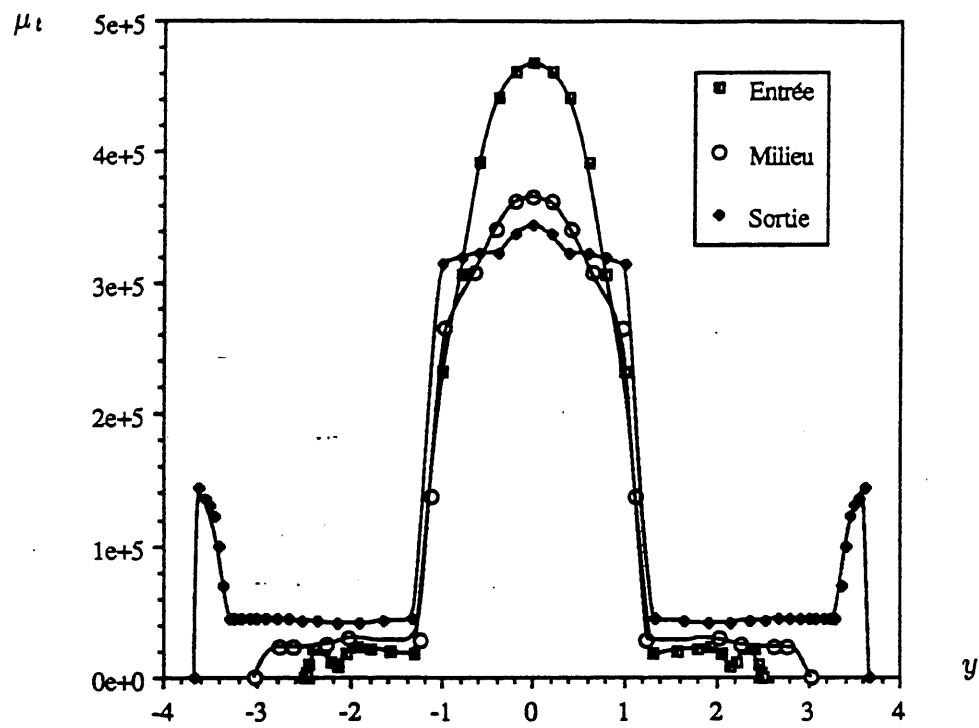


Figure 6.56: Profils de viscosité turbulente le long de la zone de mélange, écoulement compressible turbulent dans l'éjecteur "EJECT2".

Sommaire

Les modèles mathématique et numérique, développés dans ce travail, ont été validés en simulant l'écoulement interne compressible bidimensionnel dans plusieurs types de tuyères. La robustesse de la méthode *SUPG* et du capteur de forts gradients a été confirmée particulièrement si le maillage est adapté. Les résultats obtenus sont très comparables aux résultats des travaux antérieurs.

Le modèle de Baldwin et Lomax et la technique de calcul de la viscosité turbulente, sur un maillage non structuré, sont validés en étudiant l'écoulement sur une plaque plane.

La validité et l'efficacité du modèle, que nous proposons, pour la simulation des écoulements turbulents dans les éjecteurs sont confirmées par les résultats obtenus qui sont nettement supérieurs à ceux des travaux antérieurs.

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Nous clôturons cette thèse en donnant une rétrospective de ce qui a été exposé jusqu'à présent et en formulant quelques recommandations pour les travaux futurs.

Une revue et un bilan des travaux antérieurs, sur les éjecteurs, ont été effectués.

Les équations de Navier-Stokes et d'Euler ont été formulées sous forme conservative en terme de variables enthalpiques: la pression statique, la quantité de mouvement et l'enthalpie totale spécifique. Ces variables sont très flexibles concernant l'application des conditions aux limites en particulier pour les écoulements internes où la pression peut être appliquée de manière explicite et exacte.

Pour étudier les écoulements turbulents, nous avons moyenné les équation de Navier-Stokes en utilisant les moyennes de Favre et de Reynolds.

Nous avons exposé une revue bibliographique assez complète concernant les modèles de turbulence développés jusqu'à présent, en montrant clairement les avantages et inconvénients de chaque modèle.

Une analyse complète de l'écoulement dans l'éjecteur nous a conduit à proposer une formulation nouvelle de simulation de la turbulence dans ces écoulements. Nous avons alors construit un modèle de turbulence de deux couches: proche de la paroi ce modèle se réduit au modèle de Baldwin et Lomax et loin de celle-ci, le modèle est équivalent à celui de Schlichting pour les jets libres.

La formulation variationnelle de Galerkin, des équations de conservation ci-dessus, correspond à une approximation de type différences finies centrées pouvant donner des solutions instables. Pour palier à ce problème, nous avons utilisé une technique de décentrage en reformulant le problème variationnel selon la méthode *SUPG*.

La méthode *SUPG* se trouve très robuste pour une stabilité selon les directions des lignes de courant. Cependant, des instabilités peuvent persister au voisinage des discontinuités. Ainsi, pour renforcer la stabilité au voisinage des discontinuités nous avons utilisé un opérateur de capture de chocs basé sur le résidu local et, consiste en une viscosité artificielle qui est grande dans les zones critiques de forts gradients et tend vers zéro dans les zones où la solution est lisse.

Nous avons discrétisé la formulation variationnelle, dans l'espace, avec la méthode des éléments finis en utilisant une approximation mixte satisfaisant la condition de stabilité *Inf - Sup* de manière à éviter les problèmes d'oscillations dans le champ de

pression qui peuvent se produire dans le cas d'une approximation unique. Une approximation quadratique (six noeuds) a été utilisée pour les composantes de la quantité de mouvement et de la vitesse. Pour la pression, l'enthalpie, la température et la densité nous avons utilisé une approximation linéaire (trois noeuds). Nous avons discrétisé les termes temporels à l'aide d'une approximation de type différences finies en utilisant le schéma d'Euler implicite.

Nous avons implémenté une technique de calcul numérique de la viscosité turbulente, sur un maillage non structuré, basée sur la technique de Rostand.

Nous avons résolu le système matriciel, résultant de la discrétisation spatio-temporelle, à l'aide de la méthode *GMRES* en utilisant un préconditionnement diagonal.

La validité de la méthode numérique ci-dessus a été confirmée en étudiant l'écoulement interne compressible bidimensionnel dans plusieurs types de tuyères. La robustesse de la méthodes *SUPG* et du capteur de chocs a été clairement démontrée, particulièrement si le maillage est adapté. Les résultats obtenus sont très comparables aux résultats des travaux antérieurs.

Nous avons validé le modèle de Baldwin et Lomax et la technique de calcul de la viscosité turbulente, sur un maillage non structuré, en étudiant l'écoulement sur une plaque plane.

La validité du modèle proposé pour la simulation des écoulements turbulents dans les éjecteurs a été confirmée en étudiant deux types d'éjecteurs. L'efficacité et la robustesse de ce modèle ont été démontrées clairement par les résultats obtenus qui sont nettement supérieurs aux résultats des travaux antérieurs.

Ainsi, nous pouvons dire que:

- nous avons mis au point une méthode d'éléments finis stable et robuste pour la simulation des écoulements internes compressibles bidimensionnels.
- nous avons mis au point un modèle de turbulence, très efficace et très robuste, pour la simulation des écoulements dans les éjecteurs. Ce modèle reste général et peut être appliqué aussi bien aux jets libres (axisymétriques ou à symétrie plane), en ignorant la partie proche de la paroi, qu'aux écoulements internes (axisymétriques ou à symétrie plane), en ajustant simplement la constante K dans la partie loin de la paroi.
- les objectifs projetés ont été atteints et que le travail accompli constitue une base fondamentale pour les travaux futurs particulièrement sur les écoulements internes turbulents.

Finalement, compte tenu de la puissance, démontrée clairement par les résultats obtenus, des méthodes et techniques numériques développées durant ce travail de recherche, nous recommandons qu'à très court terme:

- Une adaptation de maillages soit effectuée:
 - dans le cas de l'écoulement dans la tuyère à deux cols pour Reynolds 1600 permettant, sans doute, une résolution plus rapide et plus nette.
 - pour l'écoulement dans l'éjecteur du centre de recherche *NASA Lewis*, permettant de réduire le temps d'exécution de manière à pouvoir étendre les calculs pour d'autres rapports de pressions et ainsi établir clairement le comportement de l'écoulement qui peut contribuer, sans doute, à l'amélioration de la conception dans le but de réduire le bruit énorme engendré par l'écoulement dans cet éjecteur.
- Une extension au cas des écoulements internes axisymétriques soit effectuée et qu'à moyen terme une extension au cas tridimensionnel soit effectuée.

ANNEXE A

1. Forme conservative en variables conservatives

Forme quasi-linéaire :

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{V}_{,i} = (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i} + \mathcal{F}$$

avec :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u_1^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_2^2 & (3-\gamma)u_1 & (1-\gamma)u_2 & \gamma-1 \\ -u_1u_2 & u_2 & u_1 & 0 \\ -\frac{\gamma u_1 E}{\rho} + (\gamma-1)u_1 |\mathbf{u}|^2 & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{(\gamma-1)}{2}(3u_1^2 + u_2^2) & (1-\gamma)u_1u_2 & \gamma u_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_1u_2 & u_2 & u_1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u_2^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_1^2 & (1-\gamma)u_1 & (3-\gamma)u_2 & (\gamma-1) \\ a_{41} & (1-\gamma)u_1u_2 & a_{43} & \gamma u_2 \end{bmatrix}$$

où :

$$a_{41} = -\frac{\gamma u_2 E}{\rho} + (\gamma-1)u_2 |\mathbf{u}|^2$$

$$a_{43} = \frac{\gamma E}{\rho} - (\gamma-1)(u_1^2 + 3u_2^2)$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho^2 Re}U_1 & \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho Re} & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{\rho^2 Re}(U_2 - \frac{2}{3}U_1) & -\frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho Re} & \frac{\mu}{\rho Re} & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & -\frac{\mu\gamma}{\rho Re Pr} \end{bmatrix}$$

où :

$$k_{41} = -\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho^2 Re}\frac{U_1^2}{\rho} - \frac{\mu}{\rho^2 Re}\frac{U_2}{\rho}\left(U_2 - \frac{2}{3}U_1\right) - \frac{\mu\gamma}{Re Pr}\left(\frac{|\mathbf{U}|^2}{\rho^3} - \frac{E}{\rho^2}\right)$$

$$k_{42} = \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho Re}\frac{U_1}{\rho} - \frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho Re}\frac{U_2}{\rho} - \frac{\mu\gamma}{Re Pr}\frac{U_1}{\rho^2}$$

$$k_{43} = \frac{\mu}{\rho Re} \frac{U_2}{\rho} - \frac{\mu \gamma}{Re Pr} \frac{U_2}{\rho^2}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho^2 Re} U_2 & 0 & -\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho Re} & 0 \\ -\frac{\mu}{\rho^2 Re} \left(U_1 - \frac{2}{3} U_2 \right) & \frac{\mu}{\rho Re} & -\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho Re} & 0 \\ k_{41} & \frac{\mu}{\rho Re} \frac{U_2}{\rho} & k_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

où :

$$k_{41} = \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho^2 Re} \frac{U_1 U_2}{\rho} - \frac{\mu}{\rho^2 Re} \frac{U_2}{\rho} \left(U_1 - \frac{2}{3} U_2 \right)$$

$$k_{43} = -\frac{2}{3} \frac{\frac{\mu}{\rho Re}}{\rho} (U_1 + U_2)$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{\rho^2 Re} \left(U_2 - \frac{2}{3} U_1 \right) & -\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho Re} & \frac{\mu}{\rho Re} & 0 \\ \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho^2 Re} U_1 & -\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho Re} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & \frac{\mu}{\rho Re} \frac{U_1}{\rho} & 0 \end{bmatrix}$$

où :

$$k_{41} = -\frac{\mu}{\rho^2 Re} \frac{U_1}{\rho} \left(U_2 - \frac{2}{3} U_1 \right) + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho^2 Re} \frac{U_1 U_2}{\rho}$$

$$k_{42} = -\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho Re} \frac{U_1}{\rho} - \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho Re} \frac{U_2}{\rho}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{\rho^2 Re} \left(U_1 - \frac{2}{3} U_2 \right) & \frac{\mu}{\rho Re} & -\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho Re} & 0 \\ -\frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho^2 Re} U_2 & 0 & \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho Re} & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & -\frac{\mu \gamma}{\rho Re Pr} \end{bmatrix}$$

où :

$$k_{41} = -\frac{\mu}{\rho^2 Re} \frac{U_1}{\rho} \left(U_1 - \frac{2}{3} U_2 \right) - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho^2 Re} \frac{U_2^2}{\rho} - \frac{\mu \gamma}{Re Pr} \left(\frac{|\mathbf{U}|^2}{\rho^3} - \frac{E}{\rho^2} \right)$$

$$k_{42} = \frac{\mu}{\rho Re} \frac{U_1}{\rho} - \frac{\mu\gamma}{Re Pr} \frac{U_1}{\rho^2}$$

$$k_{43} = -\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho Re} \frac{U_1}{\rho} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho Re} \frac{U_2}{\rho} - \frac{\mu\gamma}{Re Pr} \frac{U_2}{\rho^2}$$

2. Forme conservative en variables enthalpiques

Forme vectorielle :

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{conv}(\mathbf{Y}) = \tilde{\mathbf{F}}_{i,i}^{diff}(\mathbf{Y}) + \tilde{\mathcal{F}}$$

avec :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p \\ U_1 \\ U_2 \\ h \end{pmatrix} \quad (\text{Variables enthalpiques})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_i^{conv} = \begin{pmatrix} U_i \\ U_i u_1 + p \delta_{1i} \\ U_i u_2 + p \delta_{2i} \\ h U_i \end{pmatrix} \quad (\text{Flux de convection})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_i^{diff} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{ij} u_j - q_i \end{pmatrix} \quad (\text{Flux de diffusion})$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ f_i U_i \end{pmatrix} \quad (\text{Vecteur source})$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ha_{11} - 1 & ha_{12} & ha_{13} & a_{44} \end{bmatrix}$$

où :

$$a_{11} = \left[\frac{\gamma}{2(\gamma-1)h} \right] + \frac{p \left[\frac{\gamma}{2(\gamma-1)h} \right]^2}{\sqrt{\left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h}}}$$

$$a_{12} = \frac{U_1}{2h \sqrt{\left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h}}}$$

$$a_{13} = \frac{U_2}{2h \sqrt{\left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h}}}$$

$$a_{14} = - \left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right] - \frac{\frac{1}{h^3} \left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{4h^2}}{\sqrt{\left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h}}}$$

$$a_{44} = h a_{14} + \left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right] + \sqrt{\left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)h} \right]^2 + \frac{|\mathbf{U}|^2}{2h}}$$

Forme quasi-linéaire :

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{,t} + \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{Y}_{,i} = (\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{Y}_{,j})_{,i} + \tilde{\mathcal{F}}$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{F}_{i,\mathbf{Y}}^{conv} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_0$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = \mathbf{K}_{ij} \mathbf{A}_0$$

3. Calcul de la matrice de stabilisation τ_{\simeq}

La matrice de stabilisation est définie comme:

$$\tau_{\simeq} = \left[\sum |c_{ij} \mathbf{A}_j| \right]^{-1} \tilde{\xi}(Pe)$$

La détermination des valeurs propres et des matrices des vecteurs associées aux matrices $c_{ij} \mathbf{A}_j$ peut se faire à travers les variables non conservatives comme suit:

On sait que:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{M} \hat{\mathbf{A}}_i \mathbf{M}^{-1}$$

avec

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \hat{\mathbf{V}}}$$

où \mathbf{A}_i et $\hat{\mathbf{A}}_i$ sont les matrices, selon la direction i , correspondant aux variables conservatives $\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{U}, E)^t$ et non conservatives $\hat{\mathbf{V}} = (\rho, \mathbf{u}, p)^t$ respectivement. Il vient:

$$\mathbf{B}_i = c_{ij} \mathbf{A}_j = \mathbf{M} (c_{ij} \hat{\mathbf{A}}_j) \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M} (\hat{\mathbf{B}}_j) \mathbf{M}^{-1}$$

Comme les matrices $\hat{\mathbf{A}}_i$ sont diagonalisables, il en est alors de même pour les matrices $\hat{\mathbf{B}}_i$. Il existe donc des matrices diagonales $\hat{\Lambda}_i$ et inversibles $\hat{\mathbf{T}}_i$ telles que:

$$\hat{\mathbf{B}}_i = \hat{\mathbf{T}}_i \hat{\Lambda}_i \hat{\mathbf{T}}_i^{-1}$$

Notons que l'indice répété i ne signifie pas une sommation.

Il vient:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{M} \hat{\mathbf{T}}_i \hat{\Lambda}_i \hat{\mathbf{T}}_i^{-1} \mathbf{M}_i^{-1} = \mathbf{T}_i \hat{\Lambda}_i \hat{\mathbf{T}}_i^{-1}$$

d'où,

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{M} \hat{\mathbf{T}}_i, \quad \mathbf{T}_i^{-1} = \hat{\mathbf{T}}_i^{-1} \mathbf{M}^{-1} \quad \text{et} \quad \Lambda_i = \hat{\Lambda}_i$$

Ainsi,

$$|\mathbf{B}_i| = |c_{ij} \mathbf{A}_j| = \mathbf{T}_i |\Lambda_i| \mathbf{T}_i^{-1} = (\mathbf{M} \hat{\mathbf{T}}_i) |\hat{\Lambda}_i| (\hat{\mathbf{T}}_i^{-1} \mathbf{M}^{-1})$$

avec $\hat{\Lambda}_i = \text{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}, \lambda_{i4})$ où $\lambda_{ik} (k = 1, 4)$ sont les valeurs propres associées aux matrices $\hat{\mathbf{B}}_i = c_{ij} \hat{\mathbf{A}}_j$ et sont données par:

$$\lambda_{i1} = \lambda_{i2} = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2$$

$$\lambda_{i3} = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 + c$$

$$\lambda_{i4} = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 - c$$

où $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ est la célérité du son.

Les formes explicites des matrices \mathbf{M} , \mathbf{M}^{-1} , $\hat{\mathbf{A}}_1$, $\hat{\mathbf{A}}_2$, $\hat{\mathbf{T}}_i$ et $\hat{\mathbf{T}}_i^{-1}$ sont:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u_1 & \rho u_2 & 1/(\gamma - 1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -u_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2}u^2 & (1-\gamma)u_1 & (1-\gamma)u_2 & (\gamma-1) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} u_2 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho c^2 & u_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{T}}_i = \begin{bmatrix} c_{i1}^2 & c_{i2}^2 & \frac{\rho}{c\sqrt{2}} & \frac{\rho}{c\sqrt{2}} \\ -c_{i2} & c_{i2} & \frac{c_{i1}}{\sqrt{2}} & \frac{-c_{i1}}{\sqrt{2}} \\ c_{i1} & -c_{i1} & \frac{c_{i2}}{\sqrt{2}} & \frac{-c_{i2}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\rho c}{\sqrt{2}} & \frac{\rho c}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{T}}_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{i1}^2 + c_{i2}^2} & \frac{-c_{i2}^3}{(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)^2} & \frac{c_{i1}c_{i2}^2}{(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)} & \frac{-1}{c^2(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)^2} \\ \frac{1}{c_{i1}^2 + c_{i2}^2} & \frac{c_{i1}^2c_{i2}}{(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)^2} & \frac{-c_{i1}^3}{(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)^2} & \frac{-1}{c^2(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)} \\ 0 & \frac{c_{i1}}{\sqrt{2}(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)} & \frac{c_{i2}}{\sqrt{2}(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)} & \frac{-1}{\rho c\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-c_{i1}}{\sqrt{2}(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)} & \frac{-c_{i2}}{\sqrt{2}(c_{i1}^2 + c_{i2}^2)} & \frac{1}{\sqrt{2}\rho c} \end{bmatrix}$$

où $u^2 = u_1^2 + u_2^2$ et $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ est la vitesse du son.

ANNEXE B

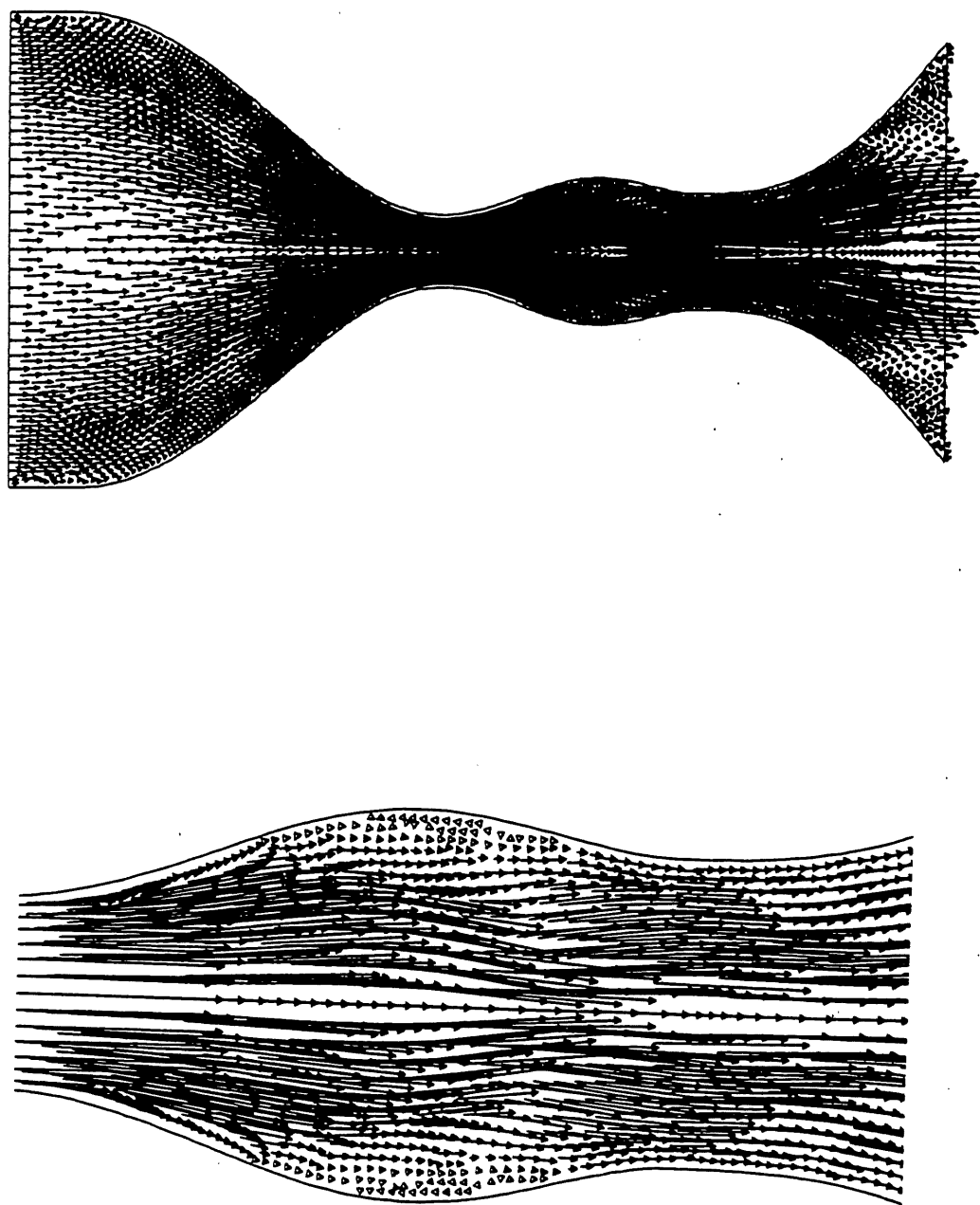


Figure B1: Champ de vitesse, écoulement compressible visqueux
dans la tuyère à deux cols, $Re = 100$

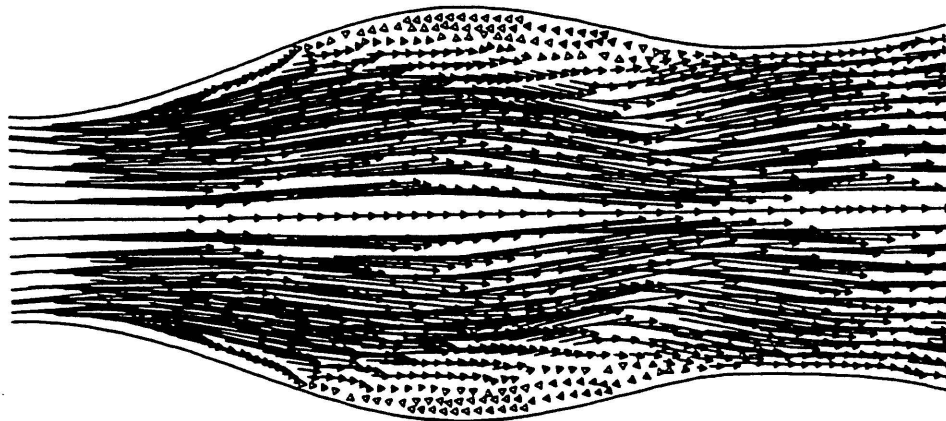
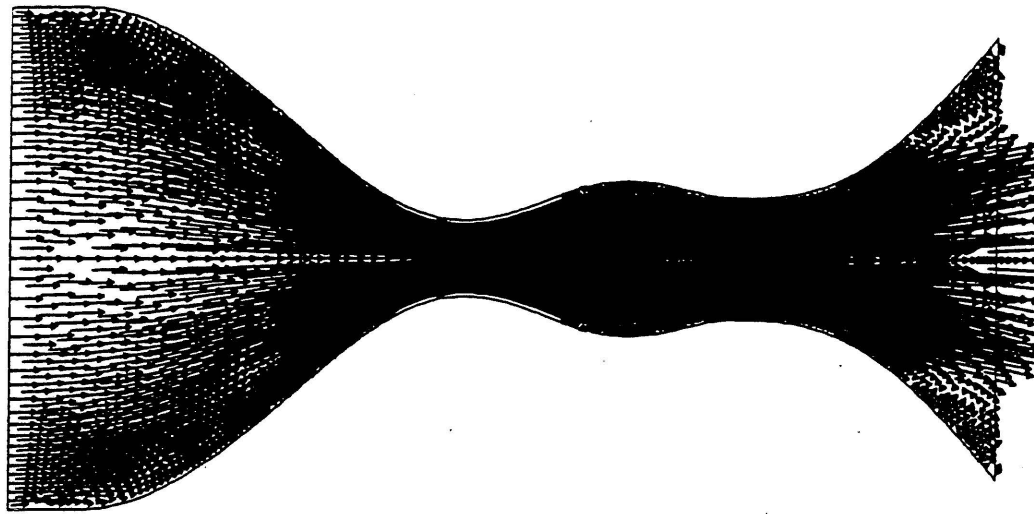


Figure B2: Champ de vitesse, écoulement compressible visqueux
dans la tuyère à deux cols, $Re = 400$

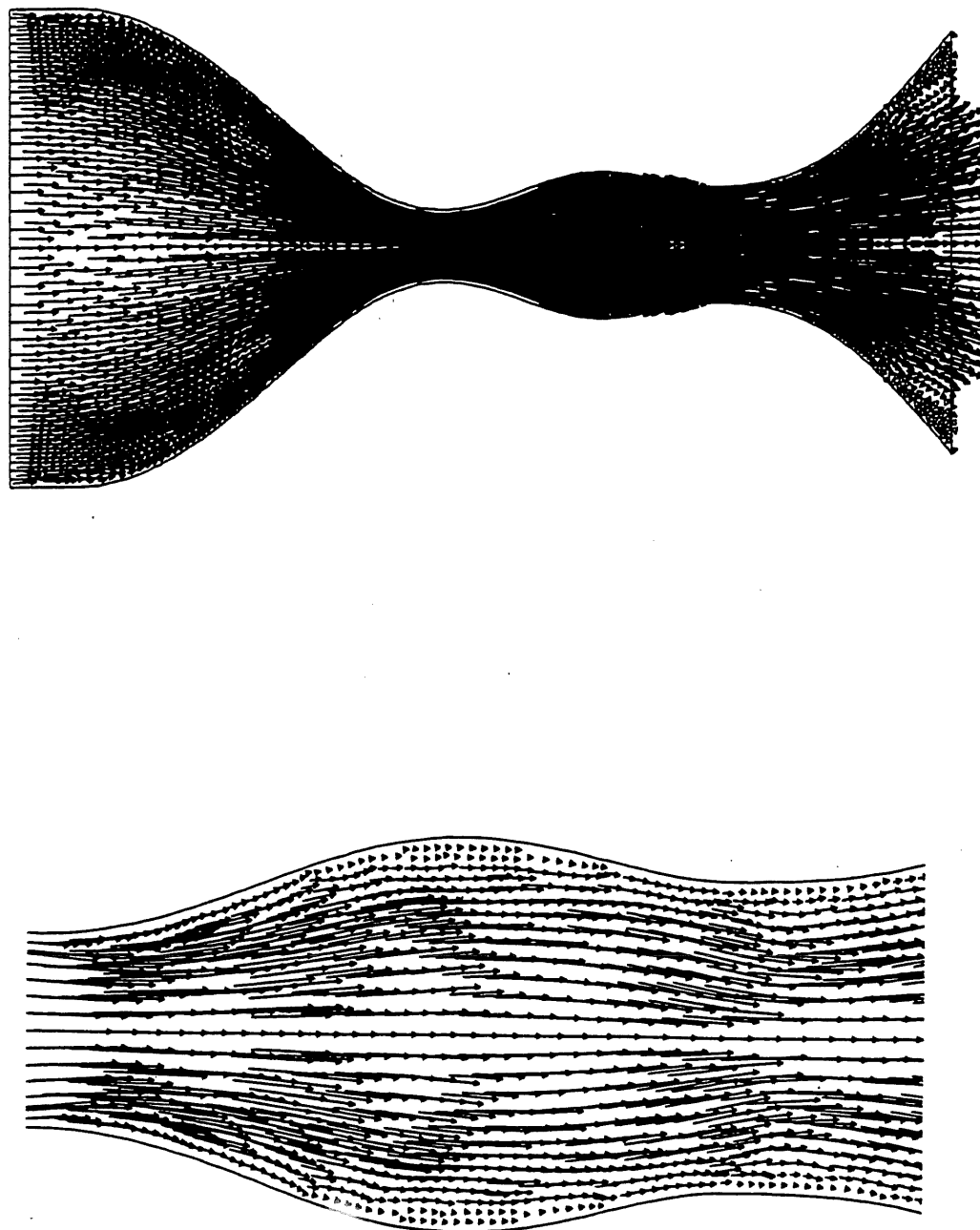


Figure B3: Champ de vitesse, écoulement compressible visqueux
dans la tuyère à deux cols, $Re = 1600$

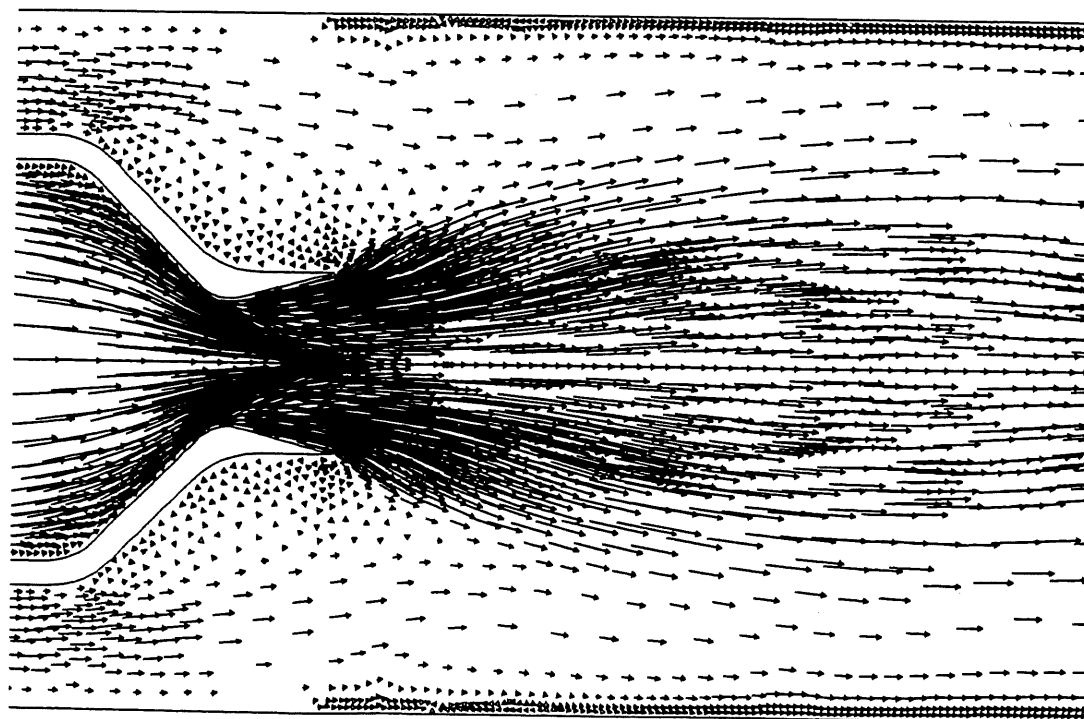
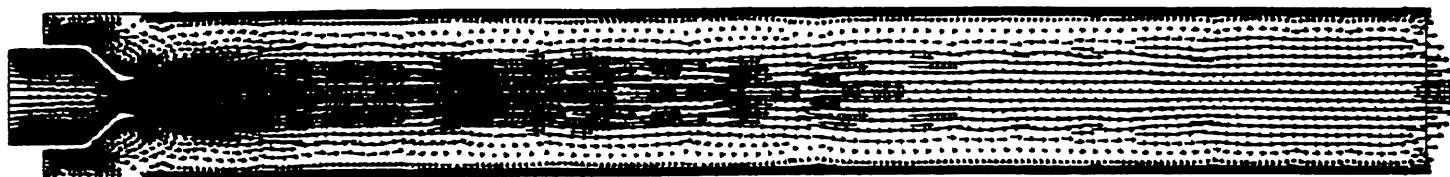


Figure B4: Champ de vitesse, écoulement compressible turbulent
dans l'éjecteur "EJECT1"

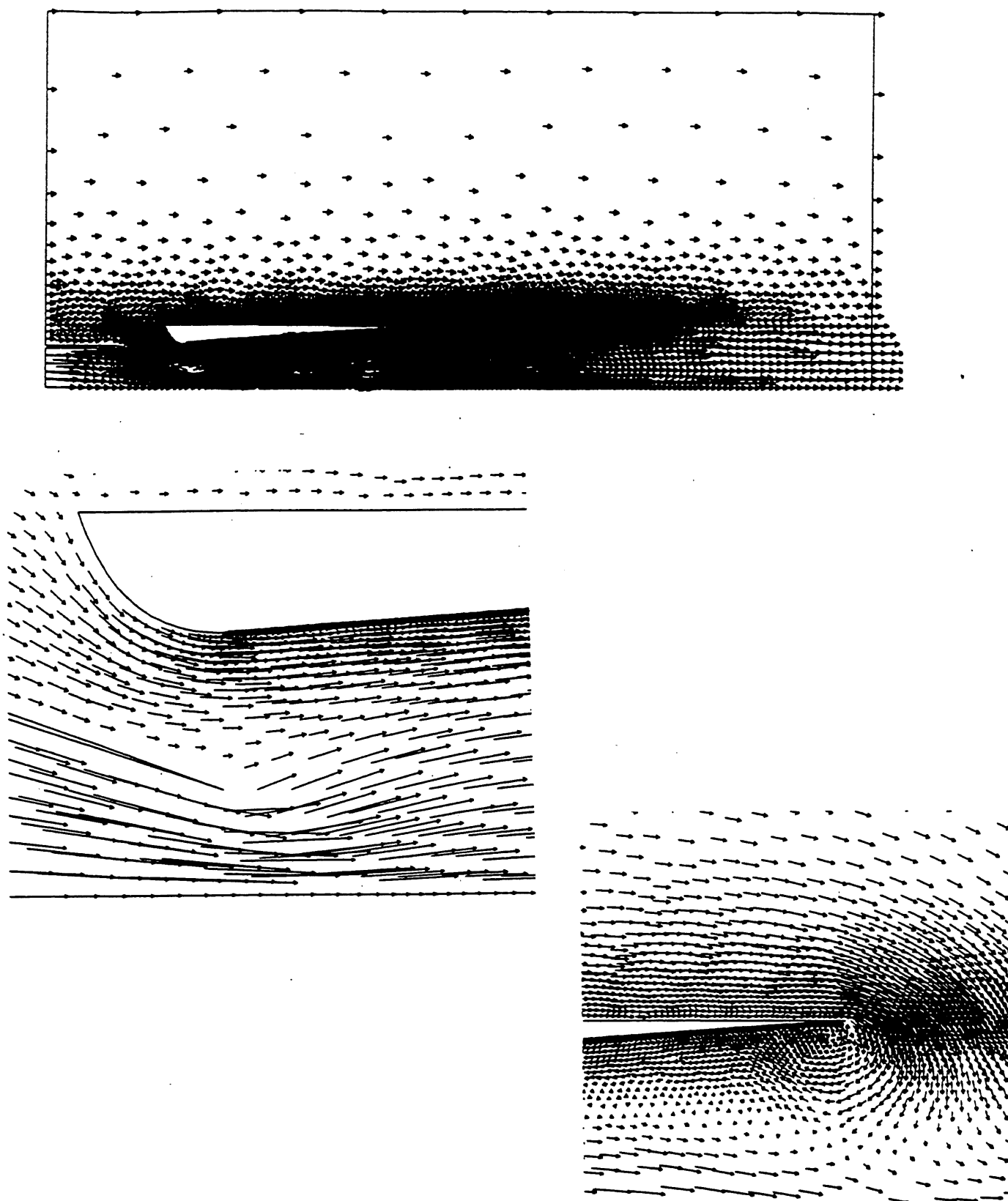


Figure B5: Champ de vitesse, écoulement compressible turbulent
dans l'éjecteur "EJECT2"

ANNEXE C

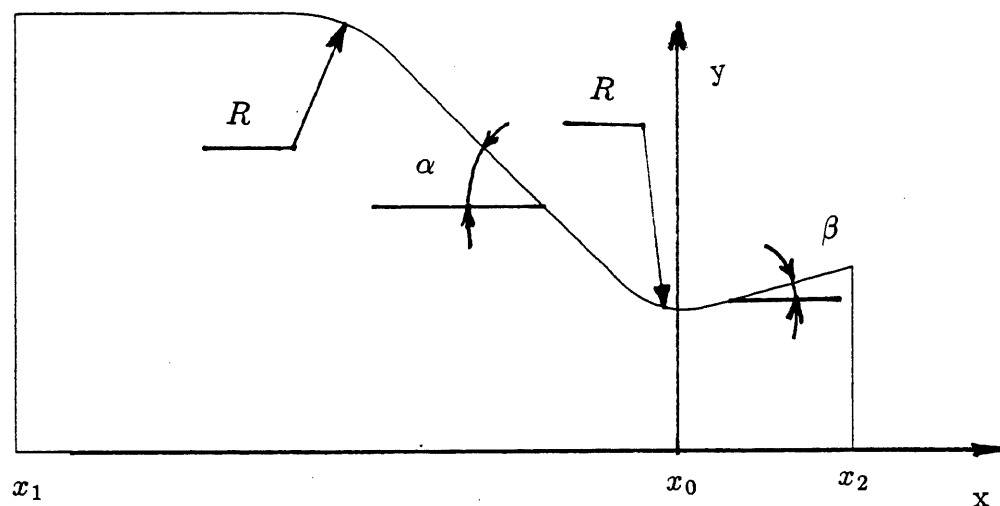


Figure C1: Géométrie de la tuyère bidimensionnelle de type GPL

$$x_1 = -4.798 \quad y(x_1) = 3.125$$

$$x_0 = 0 \quad y(x_0) = 1$$

$$x_2 = 1.202 \quad y(x_2) = 1.4155$$

$$R = 0.625 \quad \alpha = 45^\circ \quad \beta = 15^\circ$$

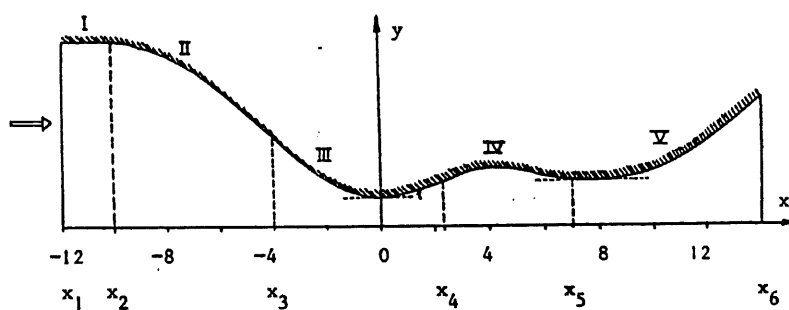


Figure C2: Géométrie de la tuyère à deux cols

Arc III (région du premier col)

$$x_3 \leq x \leq x_4, \quad \boxed{x_3 = -4, x_4 = 2.3}$$

$$y = 1 + \frac{a}{2}x^2 \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x_3+x_4}{3}x + x_3x_4 \right], \quad \boxed{a = -0.03}$$

On déduit:

$$y(x_3) = 1 + \frac{a}{6}x_3^3(2x_4 - \frac{1}{2}x_3)$$

$$y'(x_3) = \frac{a}{2}x_3^2(x_4 - \frac{1}{3}x_3)$$

$$y(x_4) = 1 + \frac{a}{3}x_4^3(x_3 - \frac{1}{4}x_4)$$

$$y'(x_4) = \frac{a}{2}x_4^2(x_3 - \frac{1}{3}x_4)$$

Les points $x = x_3$ et $x = x_4$ sont des points d'inflexion ($y'' = 0$). Le rayon de courbure du premier col est $R = \frac{1}{ax_3x_4} = \frac{1}{0.276}$.

Arc II (convergent)

$$x_2 \leq x \leq x_3, \quad \boxed{x_2 = -10}$$

$$y = y(x_3) + y'(x_3)(x - x_3)[1 - \frac{1}{3}(\frac{x-x_3}{x_2-x_3})^2]$$

On déduit:

$$y(x_2) = y(x_3) + \frac{2}{3}(x_2 - x_3)y'(x_3)$$

à $x = x_2, y' = 0$

Arc I (section constante)

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad \boxed{x_1 = -12}$$

$$y = y(x_2)$$

Arc IV (divergent-convergent)

$$x_4 \leq x \leq x_5, \quad \boxed{x_5 = 7}$$

Le second col est à $x = x_5, y'(x_5) = 0$, avec $y(x_5)$ donné :

$$\boxed{y(x_5) = 1.6}$$

$$y = y(x_4) + (x - x_4)[y'(x_4) + A_5X^2 + B_5X^3]$$

$$X = (x - x_4)/(x_5 - x_4)$$

$$A_5 = 4C_5 - 3y'(x_4)$$

$$B_5 = -3C_5 + 2y'(x_4)$$

$$C_5 = (y(x_5) - y(x_4))/(x_5 - x_4)$$

Arc V (divergent)

$$x_5 \leq x \leq x_6, \quad \boxed{x_6 = 14} \quad \boxed{y(x_6) = 5.85}$$

$$y = y(x_5) + [y(x_6) - y(x_5)]z^3(2 - z)$$

$$z = (x - x_5)/(x_6 - x_5)$$

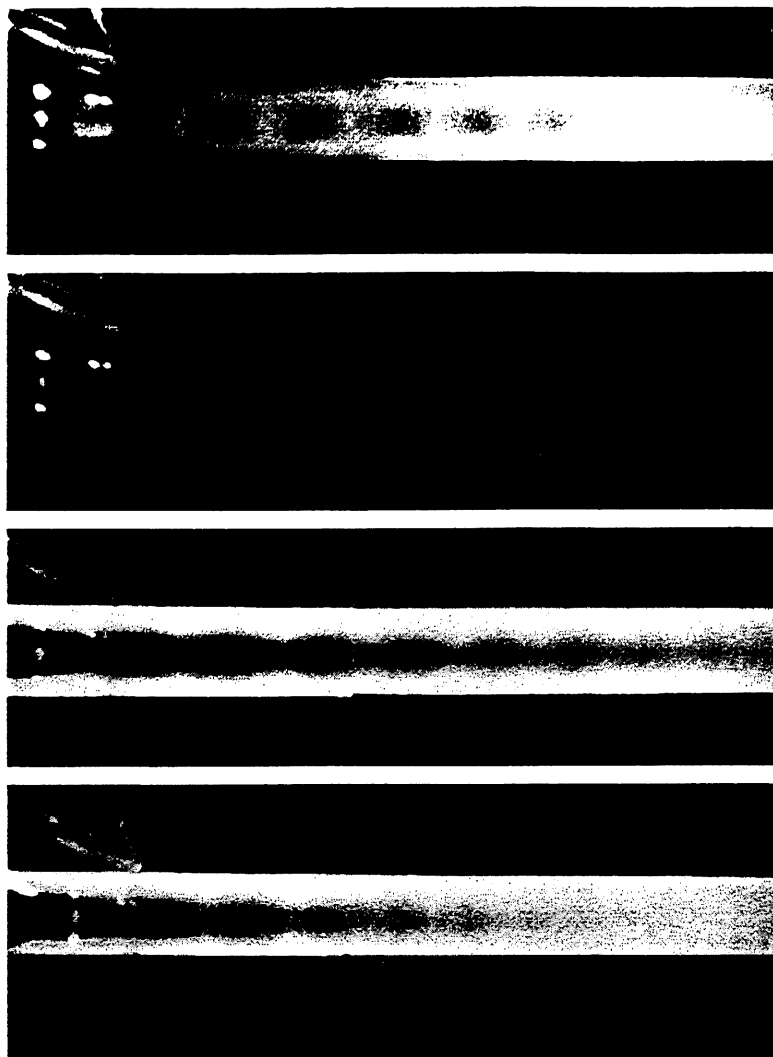


Fig. a–d. Flow visualizations using a linearly polarized light source. The images extend along 20 cm from the primary nozzle exit (the flow is from left to right) **a** vertical incident polarization ($A=90^\circ$); **b** horizontal incident polarization ($A=0^\circ$); **c** horizontal incident polarization and depolarizing tracers; **d** vertical incident polarization and depolarizing tracers

Figure C3: Visualisations optiques d'un écoulement dans un éjecteur données par la référence [125].

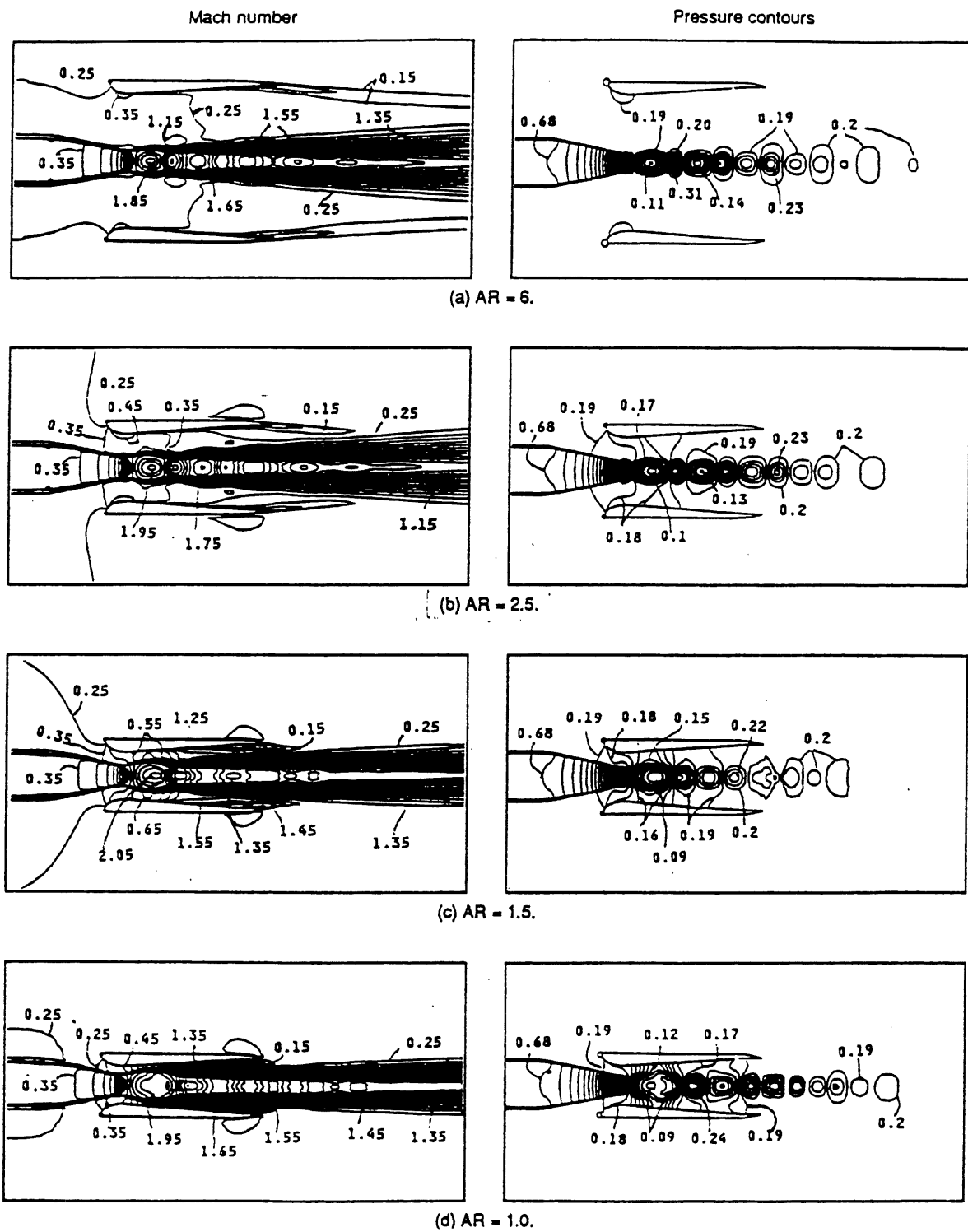


Figure C4: Lignes iso-Mach et isobares d'un écoulement dans un éjecteur données par la référence [52].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Dhatt et G. Touzot, "Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis", *Maloine S. A. Editeur Paris et Les Presses de l'Université Laval, Québec*, 1981.
- [2] O. Pironneau, "On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equation", *Num. Math.*, Vol. 38, pp. 309-332, 1982.
- [3] K. W. Morton, "Generalized Galerkin methods for hyperbolic problems", *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 52, pp. 847-871, 1985.
- [4] K. W. Morton and A. K. Parott, "Generalized Galerkin methods for first-order hyperbolic equations", *J. Comput. Phys.*, Vol. 36, pp. 249-270, 1980.
- [5] J. Donea, "A Taylor-Galerkin method for conservative transport problems", *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 20, pp. 101-120, 1984.
- [6] A. N. Brooks and T. J. Hughes, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows", *Proc. Third Internat. Conf. on Finite Element Methods in Fluid Flow*, Banff, Canad, 1980.
- [7] A.N. Brooks, T.J.R. Hughes, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, pp. 199-259, 1982.
- [8] T. J. R. Hughes and A. Brook, "A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion", in T.J. Hughes (ed), *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, AMD, Vol. 34, ASME, New York, pp. 19-35, 1979.
- [9] M. Mallet, "A finite element method for computational fluid dynamics", *Ph.D. Thesis, Division of Applied Mechanics, Stanford University, CA*, 1985.
- [10] A. Soulaïmani and M. Fortin, "Finite element solution of compressible viscous flows using conservative Variables", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 118, pp. 319-350, 1994.

- [11] A. Soulaïmani, A. Rebaine and Y. Mercadier, "Numerical Evaluation of a New Shock Capturing Operator for Compressible Flows", *The Third World Congress on Computational Mechanics, IACM, Chiba, Japan*, Vol. 1, pp. 200-201, 1994.
- [12] F. Shakib, "Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations", *Ph.D. Thesis, Division of Applied Mechanics, Stanford University, CA*, 1989.
- [13] A. C. Galeao and E. G. Dutra do Carmo, "A Consistent Approximate Upwind Petrov-Galerkin Method for Convection-Dominated Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 68, pp. 83-95, 1988.
- [14] M. Fortin, H. Manouzi and A. Soulaïmani, "On finite element approximations and stabilization methods for compressible viscous flows", *International Journal of Numerical Methods in fluids*, Vol. 17, pp. 477-499, 1993.
- [15] A. Soulaïmani et N.E.E. Elkadri, "Sur une méthode de décentrage de schémas d'éléments finis résolvant les équations de Navier-Stokes et de Saint-Venant". *la Revue européenne des éléments finis*, Vol. 1 (2), pp. 279-307, 1992.
- [16] T. J. R. Hughes, L. P. Franca and Hulbert, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 73, pp. 173-189, 1989.
- [17] T. J. R. Hughes and T. E. Tezduyar, "Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 45, pp. 217-284, 1984.
- [18] L. Franca, S. L. Frey and T. J. R. Hughes, "Stabilized finite element methods : I. Application to the advective-diffusive model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 95, pp. 253-276, 1992.
- [19] M.-O. Bristeau, R. Glowinski and J. Périaux, "Numerical methods for the Navier-Stokes equations. Applications to the simulation of compressible and incompressible viscous flows", *Computer Physics Report, 6, North Holland, Amsterdam*, pp. 73-187, 1987.
- [20] P. Hansbo and C. Johnson, "Adaptive streamline diffusion methods for compressible flow using conservative variables", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 87, pp. 267-280, 1991.

- [21] G. Hauke and T.J.R. Hughes, "A unified approach to compressible and incompressible flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, pp. 389-395, 1994.
- [22] A. Rebaine, A. Soulaïmani and Y. Mercadier, "Numerical Simulation of Compressible Flows in Ejectors", *The Second International Thermal Energy Congress, Agadir, Morocco*, Vol. 2, pp. 655-659, 1995.
- [23] A. Rebaine, A. Soulaïmani and Y. Mercadier, "Modélisation des Ejecteurs Fonctionnant en Régime Supersonique avec une Methode d'Eléments Finis", *The Third Annual Conference of the CFD Society of Canada, Banff, Alberta*, Vol. 2, pp. 261-268, 1995.
- [24] A. Soulaïmani, N.E.E. Elkadri et C. Deschênes, "Une méthode d'éléments finis pour le calcul des écoulements de fluides compressibles utilisant les variables conservatives et la méthode SUPG", *la Revue européenne des éléments finis*, Vol. 3 (2), pp. 211-245, 1994.
- [25] J. L. Porter and R. A. Squyers, "A Summary Overview of Ejector Augmenter Theory and Performance", *Vought Corporation Advanced Technology Center, Dallas, Texas*, ATC Report No. R-91100/9CR-47A, 1981.
- [26] A. L. Mellanby, "Fluid Jets and their Applications", *la Trans. of Institution of Chem. Eng.*, Vol. 6, pp. 66-84, 1928.
- [27] J. H. Keenan, E. P. Neumann and F. Lustwerk, "An investigation of Ejector Design by Analysis and Experiment", *la J. Appl. Mech.*, Vol. 17, pp. 299-309, 1950.
- [28] N. H. Johannsen, "Ejector Theory and Experiments", *la Trans. of Danish Academy of Tech. Sciences, Copenhagen*, Vol. 1, 1951.
- [29] J. Fabri and R. Siestrunk, "Supersonic Air Ejectors", *la Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York*, vol. 5, pp. 1-34, 1958.
- [30] W. L. Chow and A. L. Addy, "Interaction between Primary and Secondary streams of Supersonic Ejector Systems and their Performance Characteristics", *AIAA Journal*, Vol. 2, No. 4, pp. 686-695, 1964.
- [31] J. L. Loth, "Theoretical Optimization of Staged Ejector Systems, Part I", *Arnold Engineering Development Center, Arnold Air Force Station, Tenn*, Report No. AEDC-TR-66-2.

- [32] J. L. Loth, "Theoretical Optimization of Staged Ejector Systems, Part II", *Arnold Engineering Development Center, Arnold Air Force Station, Tenn*, Report No. AEDC-TR-68-80.
- [33] K. E. Hickman, P. G. Hill and Gilbert G. B. , "Analysis and Testing of Compressible Flow Ejectors with Variable Area Mixing Tubes", *Journal of Basic Engineering*, June, 1972.
- [34] B. H. Anderson, "Computer Program for Calculating the Flow Field of Supersonic Ejector Nozzles", *NASA-Lewis Research Center, Cleveland, Ohio*, Report No. NASA TN D-7602, 1974.
- [35] G. Emanuel, "Optimum Performance for a Single-stage Gaseous Ejector", *AIAA Journal*, vol. 14, No. 9, pp. 1292-1296, 1976.
- [36] C. D. Mikkelsen, M. R. Sandberg and A. L. Addy, "Theoretical and Experimental Analysis of the Constant-Area Supersonic-Supersonic Ejector", *Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Illinois at Urbana Champaign, Urbana III*, Report No. UILU-ENG-76-4003, 1976.
- [37] S. H. Hasinger, "Ejector Optimization", *Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio*, Report No. AFFDL-TR-78-23.
- [38] J. C. Dutton and B. F. Carroll, "Optimal Supersonic Ejector Designs", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 108, pp. 414-420, 1986.
- [39] J. C. Dutton and B. F. Carroll, "Limitation of Ejector Performance Due to Exit Chocking", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 110, pp. 91-93, 1988.
- [40] J. Jr. Der, "Improved Methods Of Characterizing Ejector Pumping Performance", *Journal of Propulsion and Power*, vol. 7, No. 3, pp. 412-419, 1991.
- [41] Ting-Hsien Lan and Hong-Sen Kou, "Non-uniform Velocity Effect in a Constant-Area Ejector Without a Diffuser", *Applied Energy*, vol. 38, pp. 181-198, 1991.
- [42] T. S. Lund, D. A. Tavella and L. Roberts, "A Zonal Computational Approach to Thrust Augmenter Optimization", *AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, AIAA-85-0110, 1985.
- [43] H. Schlichting, "Boundary-Layer Theory", *McGraw Hill, Inc.*.

- [44] J. E. Deese and R. K. Agarwal, "A Numerical Study of Viscous Flow in Inlets and Augmenters", *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, AIAA-88-0187, 1988.
- [45] B. S. Baldwin and H. Lomax, "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows", *AIAA Paper 78-257*, 1978.
- [46] R. Malecki, S. Mityas and W. Lord, "Navier-Stokes Analysis of an Ejector and Mixer-Ejector Operating at Pressure Ratios in the Range 2-4", *AIAA/SAE/ASME/ASEE 26th Joint Propulsion Conference, Orlando, FL*, AIAA-90-2730, 1990.
- [47] B. E. Launder and D. B. Spalding, "Mathematical Models of Turbulence", *Academic Press*, 1972.
- [48] B. E. Launder, A. Morse, W. Rodi and D. B. Spalding, "Prediction of Free Shear Flows: A Comparison of the Performance of Six Turbulence Models", *Free Turbulent Shear Flows Conference Proceedings*, NASA-SP-321, 1972.
- [49] H. Manouzi and M. Fortin, "A Treatment of Wall Boundaries for Turbulent Flows by the Use of A Transmission Finite Element Method", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, pp. 113-126, 1991.
- [50] B. Mohammadi, "Etude du Modèle K-EPSILON de La Turbulence pour les Ecoulements Compressibles", *Thèse de Doctorat, Université Paris VI, France*, 1991.
- [51] L. P. Bernal and V. Sarohia, "Entrainment and Mixing in Thrust Augmenting Ejectors", *AIAA 21st Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, AIAA-83-0172, 1983.
- [52] Y. H. Choi and W. Y. Soh, "Computational Analysis of the Flowfield of a Two-Dimensional Ejector Nozzle", *AIAA/SAE/ASME/ASEE 26th Joint Propulsion Conference, Orlando, FL*, AIAA-90-1901, 1990.
- [53] P. D. Thomas, "Numerical Method for Predicting Flow Characteristics and Performance of Nonaxisymmetric Nozzles, Theory", NASA CR-3147, 1979.
- [54] M. EL Omari, "Contribution à l'Etude des Ecoulements de Fluides Compressibles dans un Ejecteur", *Thèse de Doctorat, Université de Sherbrooke, Québec, Canada*, 1992.

- [55] N. E. Elkadri Elyamani, "Une Méthode d'Elements Finis pour la Dynamique des Gaz et Conception Orienté Objet du Code de Calcul", *Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, Canada*, 1995.
- [56] J. Cousteix, "Turbulence et Couche Limite", *CEPADUES-EDITIONS*, 1989.
- [57] G. I. Taylor, "Statistical Theory of Turbulence", *Proc. Roy. Soc., Lond.*, vol. A151, pp. 421, 1935.
- [58] J. O. Hinze, "Turbulence", *Second Ed., McGraw-Hill, New York*, 1975.
- [59] A. Favre et al., "La Turbulence en Mécanique des Fluides", *Ed. Gauthier Villars*, 1976.
- [60] J. Boussinesq, "Théorie de l'Ecoulement Turbulent", *Mem. Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.*, vol. 23, pp. 46-50, 1877.
- [61] D. C. Wilcox, "Turbulence Modeling for CFD", *DCW Industries, Inc.*, 1993.
- [62] L. Prandtl, "Über die neues ausgebildete turbulenz", *ZAMM*, vol. 5, pp. 136-139, 1925.
- [63] T. Cebeci and A. M. O. Smith, "Analysis of Turbulent Boundary Layers", *Ser. in Appl. Math and Mech., Academic Press*, vol. XV, 1974.
- [64] E. R. Van Driest, "On Turbulent Flow Near a Wall", *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 23, p. 1007, 216, 1956.
- [65] L. Prandtl, "Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete turbulent", *Nacr. Akad. Wiss. Gottingen, Math-Phys. KL.*, pp. 6-19, 1945.
- [66] P. Bradshaw, D. H. Ferriss and N. P. Atwell, "Calculation of Boundary Layer Development Using the Turbulent Energy Equation", *Nacr. Journal of fluid Mechanics*, vol. 28, Pt. 3, pp. 593-616, 1967.
- [67] V. W. Nee and L. S. G. Kovasznay, "The Calculation of the Incompressible Turbulent Boundary Layer by a Simple Theory", *Physics of Fluids*, vol. 12, p. 473, 1968.
- [68] B. S. Baldwin and T. J. Barth, "A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows", *NASA TM-102847*, 1990.

- [69] P. R. Spalart and S. R. Allmaras, "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows", *La Recherche Aéronautique*, No. 1, pp. 5-21, 1994.
- [70] A. N. Kolmogorov, "Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid", *Izvestia Academy of Sciences, USSR; Physics*, vol. 6, nos. 1 and 2, pp. 56-58, 1942.
- [71] P. Y. Chou, "On the Velocity Correlations and the Solution of the Equations of Turbulent Fluctuation", *Quart. Appl. Math.*, vol. 3, pp. 38, 1945.
- [72] J. C. Roatta, "Statistische theorie nichthomogener Turbulenz", *Zeitschrift für Physik*, vol. 129, pp. 547-572, 1951.
- [73] J. C. Roatta, "Über eine Methods zur Berechnung turbulenter Scherströmungen", *Aerodynamische Versuchsanstalt Gottingen*, Rep. 69 A 14, 1968.
- [74] S. Zeierman and M. Wolfshtein, "Turbulent Time Scale for Turbulent-Flow Calculations", *AIAA Journal*, vol. 24, No. 10, pp. 1606-1610, 1986.
- [75] C. G. Speziale, R. Abid and E. C. Anderson, "A Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near Wall Turbulence", *Seattle, WA, AIAA Paper*, 90-1481, 1990.
- [76] B. E. Launder and B. L. Sharma, "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc", *Letters in Heat and Mass Transfer*, vol. 1, No. 2, pp. 131-138, 1974.
- [77] P. G. Saffman, "Development of a Complete Model for the Calculation of Turbulent Shear Flows", *Symposium on Turbulence and Dynamical Systems, Duke Univ., Durham, NC*, 1976.
- [78] D. C. Wilcox and I. E. Alber, "A Turbulence Model for High Speed Flows", *Proc. of the 1972 Heat Trans. and Fluid Mech. Inst, Stanford Univ. Press*, pp. 231-252, 1972.
- [79] P. G. Saffman and D. C. Wilcox, "Turbulence Model Predictions for Turbulent Boundary Layers", *AIAA Journal*, vol. 12, No. 4, pp. 541-546, 1974.
- [80] D. C. Wilcox and R. M. Traci, "A Complete Model for Turbulence", *AIAA Paper 76-351*, San Diego, CA, 1976.
- [81] D. C. Wilcox and M. W. Rubesin, "Progress in Turbulence Modeling for Complex Flow Fields Including Effects of Compressibility", *NASA TP-1517*, 1980.

- [82] D. C. Wilcox, "Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models", *AIAA Journal*, vol. 26, No. 11, pp. 1299-1310, 1988.
- [83] T. J. Coakley, "Turbulence Modeling Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA Paper 83-1693, Danvers, MA, 1983.
- [84] W. P. Jones and B. E. Launder, "The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 15, pp. 301-314, 1972.
- [85] C. K. G. Lam and K. A. Bremhorst, "Modified form of $k-\epsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence", *ASME, Journal of Fluids Engineering*, vol. 103, pp. 456-460, 1981.
- [86] K. Y. Chien, "Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model", *AIAA Journal*, vol. 20, No. 1, pp. 33-38, 1982.
- [87] C. duP. Donaldson and H. Rosenbaum, "Calculation of the Turbulent Shear Flows Through Closure of the Reynolds Equations by Invariant Modeling", ARAP Report No. 127, Aeronautical Research Associates of Princeton, Princeton, NJ, 1968.
- [88] B. J. Daly and F. H. Harlow, "Transport Equations in Turbulence", *Physics of fluids*, vol. 13, pp. 2634-2649, 1970.
- [89] B. E. Launder, G. J. Reece and W. Rodi, "Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 68, Pt. 3, pp. 537-566, 1975.
- [90] J. L. Lumley, "Computational Modeling of Turbulent Flows", *Adv. Appl. Mech.*, vol. 18, pp. 123-176, 1978.
- [91] C. G. Speziale, "Modeling the Pressure-Gradient-Velocity Correlation of Turbulence", *Physics of fluids*, vol. 28, pp. 69-71, 1985.
- [92] C. G. Speziale, "Second-Order Closure Models for Rotating Turbulent Flows", *Q. Appl. Math.*, vol. 45, pp. 721-733, 1987.
- [93] W. C. Reynolds, "Fundamentals of Turbulence for Turbulence Modeling and Simulation", *In lecture Notes for von Karman Institute*, AGARD Lecture Series No. 86, pp. 1-66, New York: NATO, 1987.

- [94] V. Yakhot and S. A. Orszag, "Renormalization Group Theory Analysis of Turbulence. I. Basic Theory", *Journal of Scientific Computing*, vol. 1, No. 3, pp. 3-51, 1986.
- [95] L. Martinelli and V. Yakhot, "RNG-Based Turbulence Transport Approximations with Applications to Transonic Flows", AIAA Paper 89-1950, 1989.
- [96] T. S. Lund, "Application of the Algebraic RNG Model for Transition Simulation", *Instability and Transition*, edited by M. Y. Hussaini and R. G. Voigt, Springer-Verlag, New York, vol. 2, pp. 463-479, 1990.
- [97] V. Yakhot, "Renormalization Group for Modeling of Turbulent Flows and Turbulent Combustion", AIAA Paper 91-0218, 1991.
- [98] K. R. Kirtley, "Renormalization Group Based Algebraic Turbulence Model for Three-Dimensional Turbomachinery Flows", *AIAA Journal*, vol. 30, No. 6, pp. 1500-1506, 1992.
- [99] H. U. Meier and J. C. Rotta, "Temperature Distributions in Supersonic Turbulent Boundary Layers", *AIAA Journal*, vol. 9, pp. 2149, 1971.
- [100] A. Soulaïmani, N. E. EL Kadri et A. Rebaine, "Une Méthode d'Éléments Finis pour La Dynamique des Gaz", *Ecole d'Eté Sur La Modélisation Numérique en Thermique, Poquerolles*, 1996.
- [101] Reichardt, "Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz", *VDI-Forschungsheft 414*, 1st ed., Berlin, 1942, 2nd ed., Berlin, 1951.
- [102] V. Girault, P. A. Raviart, "Finite element methods for Navier-Stokes equations", *Springer Series SCM*, Vol. 5, 1986.
- [103] M. Fortin and A. Soulaïmani, "Finite element approximation of compressible viscous flows", in *Proc. of the Int. on Computational Method in Flow Analysis*. In H. Niki and M. Kawahara (eds.), Okayama University of Sciences Press, Vol. 2, pp. 951-956, 1988.
- [104] O. Pironneau and J. Rappaz, "Numerical analysis for compressible viscous abiabatic stationary flows", *IMPACT of Computing in Science and Engineering, Academic Press Boston*, Vol. 1, pp. 109-137, 1989.
- [105] F. Brezzi, "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multiplier", *RAIRO série Analyse Numérique R2*, 1974.

- [106] P. Rostand, "Algebraic Turbulence Models for the Computation of Two-Dimensional High Speed Flows Using Unstructured Grids", *Institute for Computer Applications in Science and Engineering* Report No. 88-63, 1988.
- [107] D. Pan and J. C. Cheng, "Upwind Finite-Volume Navier-Stokes Computations on Unstructured Triangular Meshes", *AIAA Journal*, vol. 31, No. 9, pp. 1618-1625, 1993.
- [108] Y. Saad and M. H. Schultz, "GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 7 (3), pp. 856-869, 1986.
- [109] P. Brown and Y. Saad, "Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 11 (3), pp. 450-481, 1990.
- [110] S. Boivin, "Simulation d'écoulements compressibles à nombre de Reynolds élevé", *Thèse de doctorat (Ph.D.)*, Université Laval, Québec, Canada, 1990.
- [111] F. Shakib, T.J.R. Hughes and Z. Johan, "A multi group preconditioned GMRES algorithm for nonsymmetric systems arising in finite element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 75, 415-465, 1989.
- [112] P. Brown, "A local convergence theory for combined inexact Newton/finite difference projection methods", *SIAM J. of Numerical Anal.*, Vol. 24, pp. 407-434, 1987.
- [113] Z. Johan, T. J. R. Hughes and F. Shakib, "A globally convergent matrix-free algorithm for implicit time-marching schemes arising in finite element analysis in fluids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 87, pp. 281-304, 1991.
- [114] Y. Saad, "ILUT a dual threshold incomplete ILU factorization", *Numerical Linear Algebra with Applications*, Vol. 1, pp. 387-402, 1994.
- [115] L. C. Dutto, "The effect of ordering on preconditioned GMRES algorithm, for solving the compressible Navier-Stokes equations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 457-497, 1993.
- [116] W. G. Habashi, M. Robichaud, V. -N. Nguyen, W. S. Ghaly, M. Fortin, J. W. H. Liu, "Large-scale computational fluid dynamics by the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 18, pp. 1083-1105, 1994.

- [117] A. Harten, "On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy", *Math. Comp.*, Vol. 29, pp. 1037-1045, 1975.
- [118] M. EL Omari, Y. Mercadier et G. Degrez, "Etude Numérique Comparative de l'Ecoulement d'un Fluide Compressible dans les Tuyères Bidimensionnelles et Axisymétriques", *CSME Transactions*, vol. 17, No. 3, pp. 351-368, 1993.
- [119] Meng-Sing Liou and B. van Leer, "Choice of Implicit and Explicit Operators for The Upwind Differencing Method", *AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, 1988.
- [120] J. Dompierre, M. G. Vallet, M. Fortin, W. G. Habashi, D. Ait Ali Yahia, S. Boivin, Y. Bourgault and A. Tam, "Edge-Based Mesh Adaptation for CFD", *Presented at the Conference on Numerical Methods for Euler and Navier-Stokes Equations, Montreal*, Report CERCA R95-73, 1995.
- [121] M. O. Bristeau, R. Glowinski, J. Periaux and H. Viviani, "Numerical Simulation of Compressible Naviers-Stokes Flows", *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, A GAMM-Workshop, Vol. 18.
- [122] A. Soulaïmani, D. Chassé and L. Lamarche, "Une méthode simple d'adaptation des maillages pour le calcul des écoulements compressibles", *la Revue européenne des éléments finis*, Vol. 4 (4), pp. 383-413, 1995.
- [123] S. Candel, "Mécanique des Fluides", *Bordas, Paris*, 1990.
- [124] T. Cebeci, A. M. O. Smith and G. Mosinskis, "Calculation of Compressible Adiabatic Turbulent Boundary Layers", *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 11, pp. 1974-1982, 1970.
- [125] P. Desevaux, J. P. Prenel and G. Hostache, "An optical analysis of an induced flow ejector using light polarization properties", *Experiments in Fluids*, Vol. 16, pp. 165-170, 1994.